

STABILITE DES POUTRES

1. Définition du flambage

2. Etude du cas fondamental

2.1 Théorie d'Euler

2.2 Remarques

2.3 Exemple

2.3 Exercice d'application : stabilité d'un raidisseur en "T"

3. Contrainte critique - Notion d'élançement

4. Influence des conditions aux limites

4.1 Poutre encastree à une extrémité et libre à l'autre

4.2 Poutre encastree à ses 2 extrémités

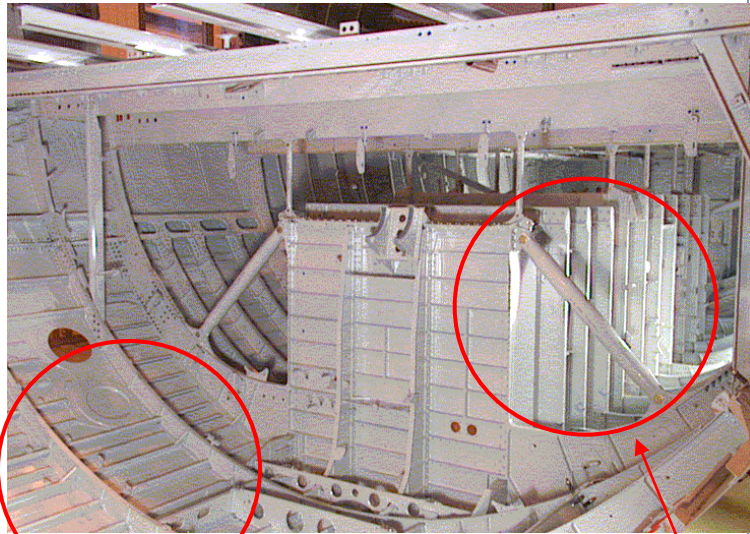
4.3 Poutre encastree à une extrémité et articulée à l'autre

4.4 Poutre sur 3 appuis

5. Pré-dimensionnement d'une nervure à bielles

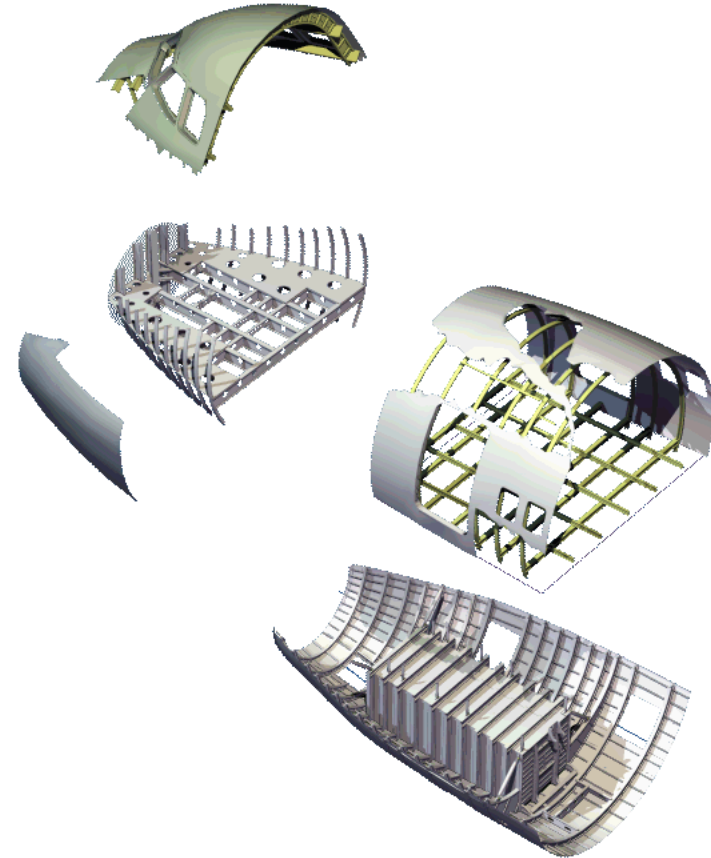
- 6. Flambage des poutres comprimées et fléchies - Excentricité de la charge**
 - 1.1 Cas d'un moment fléchissant constant - Excentricité de la charge**
 - 1.2. Cas particulier d'un moment fléchissant non constant**
- 7. Flambage des poutres rectilignes de sections évolutives**
 - 2.1 Poutre ayant une section évolutive**
 - 2.2 Poutre avec renfort local**
- 8. Remarques et discussion**
- 9. Flambage des poutres courtes - Théorème du module réduit**
 - 4.1 Matériau non écrouissable**
 - 4.2. Matériau écrouissable**
- 10. Flambage local**
 - 5.1. Utilisation d'abaques**
 - 5.2. Formules empiriques**
- 11. Conclusion**
- 12. Résumé des formulations à retenir**

EXEMPLES DE PIÈCES AVIONS DIMENSIONNÉES AU FLAMBAGE



PANNEAUX RAIDIS

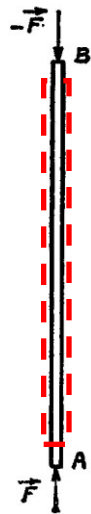
BIELLES



1. Définition :

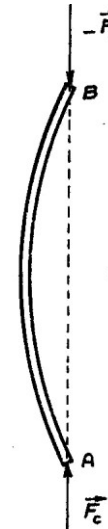
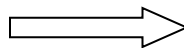
Le phénomène de flambage des poutres est un phénomène d'instabilité brutal qui apparaît lorsque une poutre très élancée est sollicitée en compression. Il s'agit d'un phénomène de ruine qui se produit alors que la contrainte courante dans la poutre est inférieure à la limite élastique du matériau.

Lorsqu'il y a flambage, l'hypothèse fondamentale de la RDM n'est plus vérifiée, ce qui veut dire que l'équilibre global écrit dans la configuration de départ n'est plus valable après déformation.



Etat 1 : Etat d'équilibre stable

$$\sigma = F/S$$



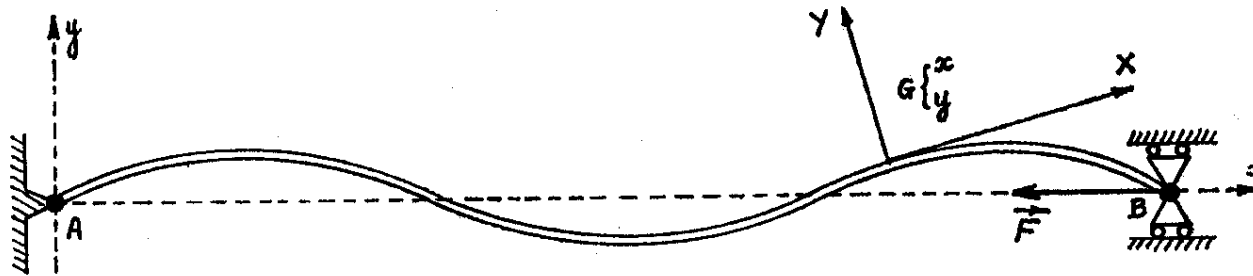
Etat 2 : Etat d'équilibre instable

$$\sigma_c \ll \sigma_{\text{élastique}}$$

2. Etude du cas fondamental : la théorie d'Euler

2.1 Formulation

Soit une poutre de longueur L , sur laquelle une très légère flexion est appliquée dans le plan xAy lui conférant la forme d'une courbe plane à n cloques. Cette poutre est articulée à un bâti en A et appuyée en B.



Problème : quelle est l'intensité de la force qui, appliquée à B et dirigée suivant BA est capable de maintenir cette flexion?

Rappel : cette théorie n'est valable que pour les poutres très élancées c'est à dire pour des poutres droites dont la longueur L est grande devant les autres dimensions.

Au centre G de la section droite, on a :

- un effort normal de compression : $N \approx -F < 0$

- un moment de flexion : $M = M_z = -y.F$

avec : x et y les coordonnées de G

Pour obtenir l'équation de la flèche, ou déformée, $y=y(x)$, on a, en négligeant **l'effet de l'effort tranchant**, l'équation suivante :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{Mz}{E.Iz} \quad \text{soit} \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{F}{E.Iz} \cdot y = 0$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$y = \alpha \cdot \sin \omega \cdot x + \beta \cdot \cos \omega \cdot x \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{F}{E.Iz}}$$

On a : en A, $x=0$ et $y=0$ ce qui implique $\beta=0$

en B, $x=L$ et $y=0$ ce qui conduit $\alpha.\sin\omega L=0$ et comme $y(x)$ est différent de 0, on obtient :
 $\sin\omega L=0$

d'où $\omega L=\lambda\pi$

L'équation de la déformée de la ligne moyenne s'écrit donc :

$$y = \alpha.\sin \lambda.\pi.\frac{x}{L}$$

Nous avons supposé que cette déformée avait n cloques donc :

$$\lambda = n \quad \text{et} \quad y = \alpha.\sin n\pi.\frac{x}{L}$$

Enfin de l'égalité $\omega.L = n\pi$, on en déduit la charge critique d'Euler :

$$F = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2} = F_c$$

avec E : le module d'élasticité de la poutre

I : le moment d'inertie de la section droite

En résumé :

Cette charge particulière F_c caractérise un état d'équilibre instable. On la désigne par «charge critique de flambage» ou « charge critique d'Euler »:

si $F < F_c$: la poutre tend à reprendre élastiquement sa position d'équilibre, la flèche disparaît.

La poutre est en équilibre stable (compression simple)

si $F = F_c$: la poutre est en équilibre instable

Si $F > F_c$: la flèche augmente jusqu'à la rupture (rupture brutale).

L'équilibre n'est pas possible : le système est instable

2.2 Remarques:

1/ Pour déterminer la formule d'Euler, on a négligé l'effort tranchant. En le prenant en compte, on obtient :

$$F = n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot EIz}{L^2} \cdot \frac{1}{1 + n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot EIz}{l^2} \cdot \frac{k}{GS}} \quad \text{or} \quad \frac{1}{1 + n^2 \cdot \frac{\pi^2 \cdot EIz}{l^2} \cdot \frac{k}{GS}} < 1$$

Cette charge est inférieure à celle calculée précédemment, cependant on montre que l'écart entre les 2 formulations est négligeable.

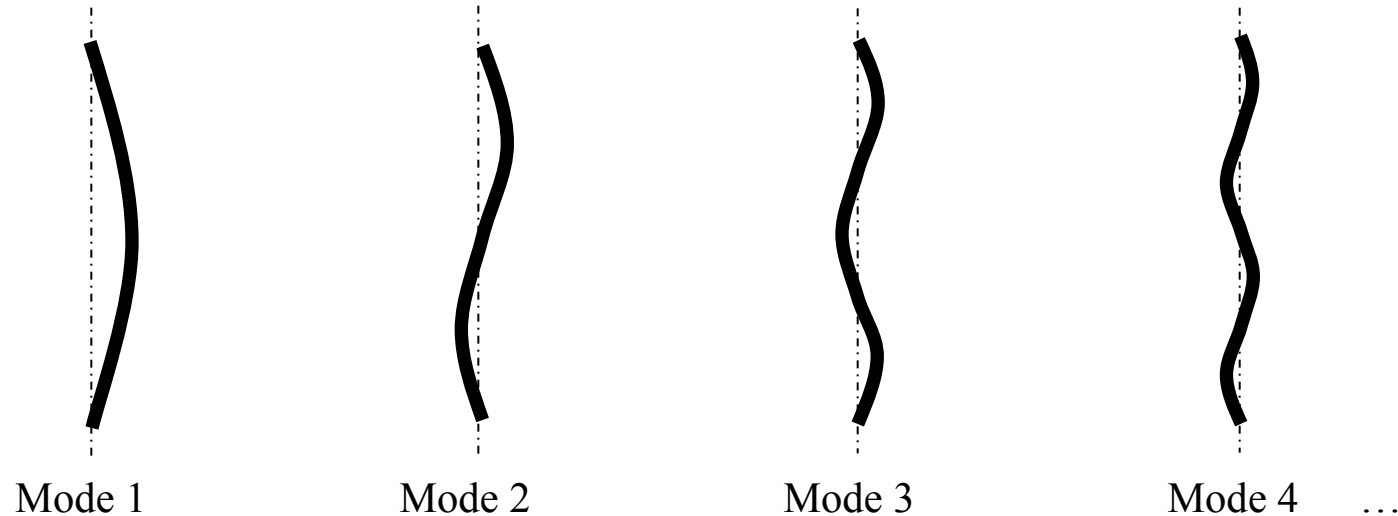
Remarques (suite):

2/ Si la déformée est à une cloque, la formule d'Euler s'écrit sous la forme :

$$F_c = \frac{\pi^2 \cdot EI_z}{L^2}$$

C'est le **mode fondamental de flambage**.

Pour $n=1,2,3,\dots$. On a les modes harmoniques. Seul le premier mode est à retenir car il correspond à la plus petite charge critique F_c conduisant à l'instabilité et donc à la ruine de la structure.



4/ Dans la suite, I désignera toujours le moment d'inertie minimum des poutres considérées (F_c minimale).

2.3 Exemple

On considère une bielle de commande de vol dont la longueur libre entre articulations (relais ou renvois) est de 1500 mm. Elle est réalisée en tube rond de diamètre $\phi = 40\text{mm}$ et d'épaisseur 1.5 mm.

Déterminer :

- La charge à rupture en compression sachant que la contrainte admissible de l'acier est 1000 MPa,
- La charge de flambage de la bielle.

1/ Calcul de la charge de rupture en compression :

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad \text{soit} \quad F_R = \sigma * S = \sigma * \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2)$$

$$\text{D 'ou} \quad F_R = 1000 * \frac{\pi}{4} (40^2 - 37^2) \approx 181000 N$$

2/ Calcul de la charge de flambage :

$$F_C = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2} \quad \text{soit} \quad I = \frac{\pi}{64} (D^4 - d^4)$$

$$\text{D 'ou} \quad F_C = \frac{\pi^2 \cdot 200000 * (\frac{\pi}{64} * (40^4 - 37^4))}{1500^2} \approx 29500 N$$

3/ conclusion

$$\text{On obtient donc :} \quad \frac{F_R}{F_C} = \frac{181000}{29500} \approx 6.1$$

La charge de flambage est donc 6 fois inférieure à la charge de rupture en compression : la bielle périra par flambage (mode de rupture inacceptable sur une structure avion).

2.4 Exercice d'application : Stabilité d'un raidisseur en "T"

1/ Quelle est la longueur maximale du raidisseur pour que ce dernier soit stable ?

Effort appliqué : $N=250\ 000\ \text{N}$

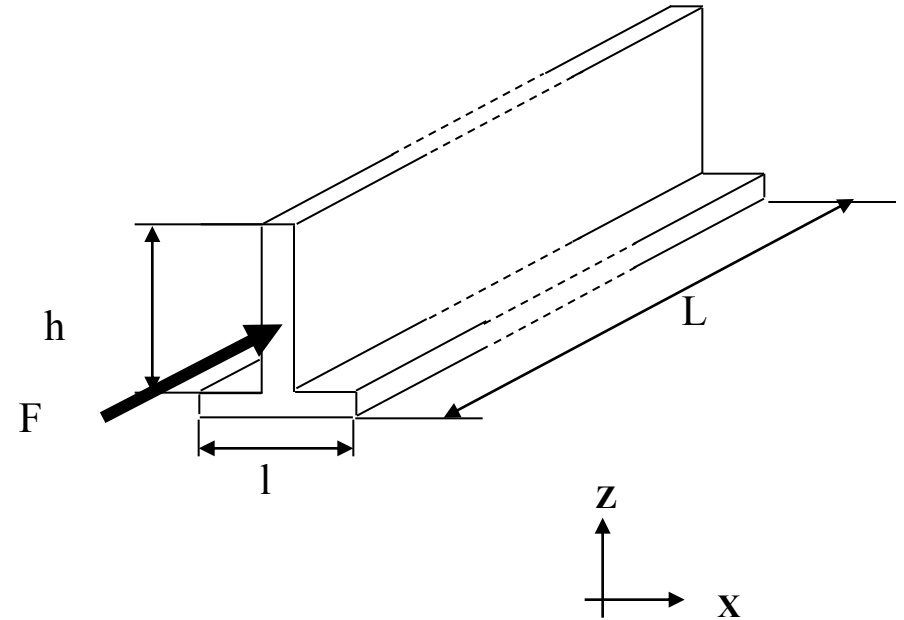
Matériau : aluminium $E=70\ 000\ \text{MPa}$

dimensions de l'âme : épaisseur : 8 mm

hauteur : 60 mm

dimensions de la semelle : épaisseur : 8 mm

largeur : 40 mm



Rappel :

Moment d'inertie pour une section rectangulaire: $I = \frac{l \cdot e^3}{12}$

Moment d'inertie du raidisseur : $I_{\text{raidisseur}} = I_{\text{âme}} + S_{\text{âme}} d_{\text{âme}}^2 + I_{\text{semelle}} + S_{\text{semelle}} d_{\text{semelle}}^2$

2/ La longueur du raidisseur réelle est de 1200 mm. Déterminer les nouvelles caractéristiques du raidisseur.

Exercice d'application : Résolution du problème

1/ Stabilité du raidisseur

- *Calcul de l'inertie du raidisseur :*

$$\text{Inertie de la semelle : } I_{\text{semelle}} = \frac{l \cdot e^3}{12} = \frac{40 \cdot 8^3}{12} = 1706.66 \text{ mm}^4$$

$$\text{Inertie de l'âme : } I_{\text{âme}} = \frac{e \cdot h^3}{12} = \frac{8 \cdot 60^3}{12} = 144000 \text{ mm}^4$$

Côte du Centre de gravité : 24.40 mm

$$S_d^2 \text{ semelle} = 40 \cdot 8 \cdot 20.4^2 = 133171 \text{ mm}^4$$

$$S_d^2 \text{ âme} = 60 \cdot 8 \cdot 13.6^2 = 88780 \text{ mm}^4$$

$$\text{d'où : } I_{\text{raidisseur}} = 1706 + 144000 + 133171 + 88780 = 367657.8 \text{ mm}^4$$

- *Détermination de la longueur du raidisseur*

$$F_c \text{ doit être inférieur à } F \text{ donc } F_c = \frac{\pi^2 \cdot EIz}{L^2} < F_{\text{appliqué}}$$

$$\text{soit } Lc < \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot EIz}{F_{\text{appliqué}}}} = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot 70000 \cdot 367657.8}{250000}} \quad \text{d'où } Lc = 1008 \text{ mm}$$

Exercice d'application : Résolution du problème

2/ Modification des dimensions du raidisseur

Pour augmenter la stabilité du raidisseur, il est nécessaire de modifier la hauteur de l'âme du raidisseur. En effet, dans le calcul de l'inertie la hauteur intervient au cube, tout comme l'épaisseur de la semelle mais cette dernière est bien inférieure à la hauteur donc moins influente sur le résultat final.

$$\text{On en déduit : } I_{\text{raidisseur}} \geq 521000 \text{ mm}^4$$

soit une hauteur d'âme minimale de 70mm ($I=540\,000 \text{ mm}^4$)

3. Contrainte critique de flambage - Notion d'élançement

La contrainte de compression peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{Fc}{S} = \frac{\pi^2 EI}{L^2 \cdot S} = \frac{\pi^2 E}{\frac{L^2}{\frac{I}{S}}}$$

Le rapport I/S représente le carré du rayon de giration ρ de la section droite relativement à l'axe servant au calcul de l'inertie puisque :

$$\rho = \sqrt{\frac{I}{S}}$$

La contrainte de compression s'écrit donc :

$$\frac{Fc}{S} = \frac{\pi^2 E}{\frac{L^2}{\rho^2}} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{L}{\rho}\right)^2}$$

Le coefficient sans dimension λ s'appelle l'élançement de la poutre et est le seul paramètre qui entre en jeu pour le calcul de la contrainte critique donnant lieu au flambage :

$$\lambda = \frac{L}{\rho}$$

Avec cette notation la contrainte de flambage devient :

$$\eta_{c\lambda} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

avec $\eta_{c\lambda}$: la contrainte critique sous l'élançement λ .

4. Influence des conditions d'appui - Notion de longueur libre au flambage

La formule d'Euler a été déterminée dans le cas particulier d'une poutre parfaitement articulée à ses 2 extrémités A et B distantes d'une longueur L.

Dans les autres modes de fixation, la longueur réelle de la poutre est appelée L'. L désigne la «longueur équivalente » ou «longueur libre au flambage».

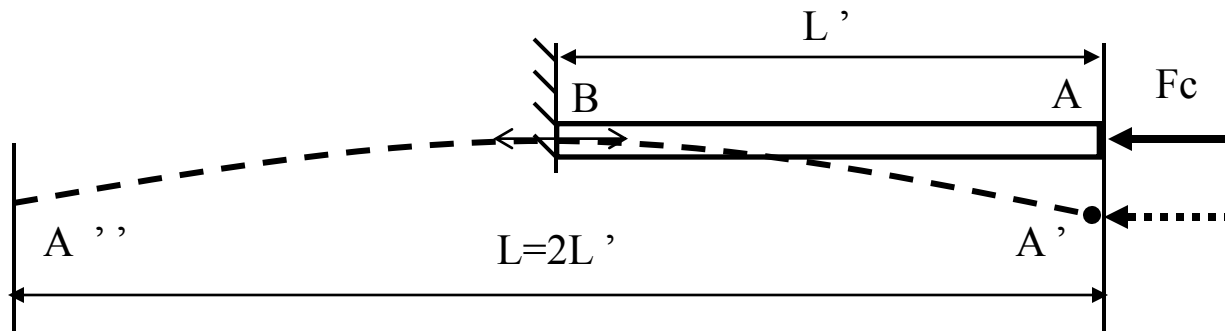
Le coefficient d'encastrement α est donné par : $\alpha = \frac{L}{L'}$

Il est donc possible d'exprimer la charge critique de flambage en fonction du coefficient d'encastrement :

$$F_c = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{\alpha^2 L'^2}$$

4.1 Poutre encastrée à une extrémité et libre à l'autre

La déformée s'établit selon l'allure A'B représentée ci-dessous.



Si l'on considère le symétrique A'' de A par rapport à l'encastrement en B. On obtient ainsi l'allure A''BA'' de la déformée d'une poutre articulée de longueur équivalente :

$$\alpha = 2$$

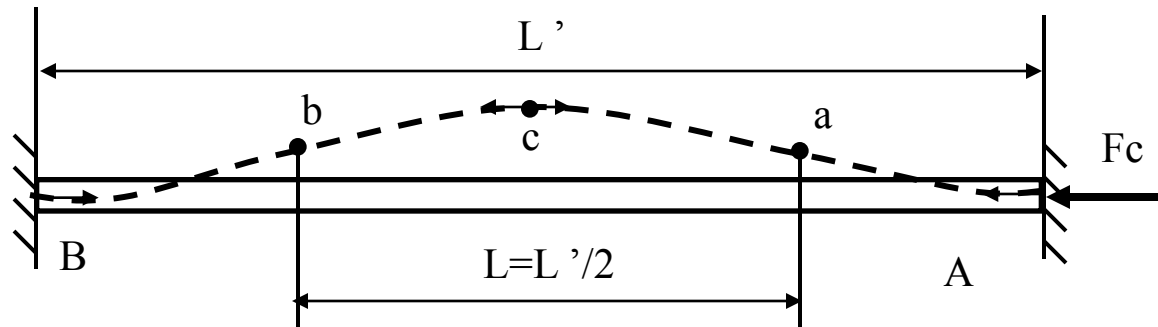
On obtient :

$$F_c = \frac{\pi^2 \cdot EI}{4 * L'^2}$$

La charge critique est donc quatre fois plus faible que celle de la même poutre articulée à ses 2 extrémités.

4.2. Poutre encastrée à ses 2 extrémités

Si les encastremements sont fixés transversalement, la tangente en A et celle en B à la déformée sont dirigées suivant la droite AB. Il y a donc 2 points d'inflexion en a et b.



Ces 2 points sont assimilables à 2 articulations fictives et partagent donc les 2 demi-poutres en 2 parties égales. Ce qui donne :

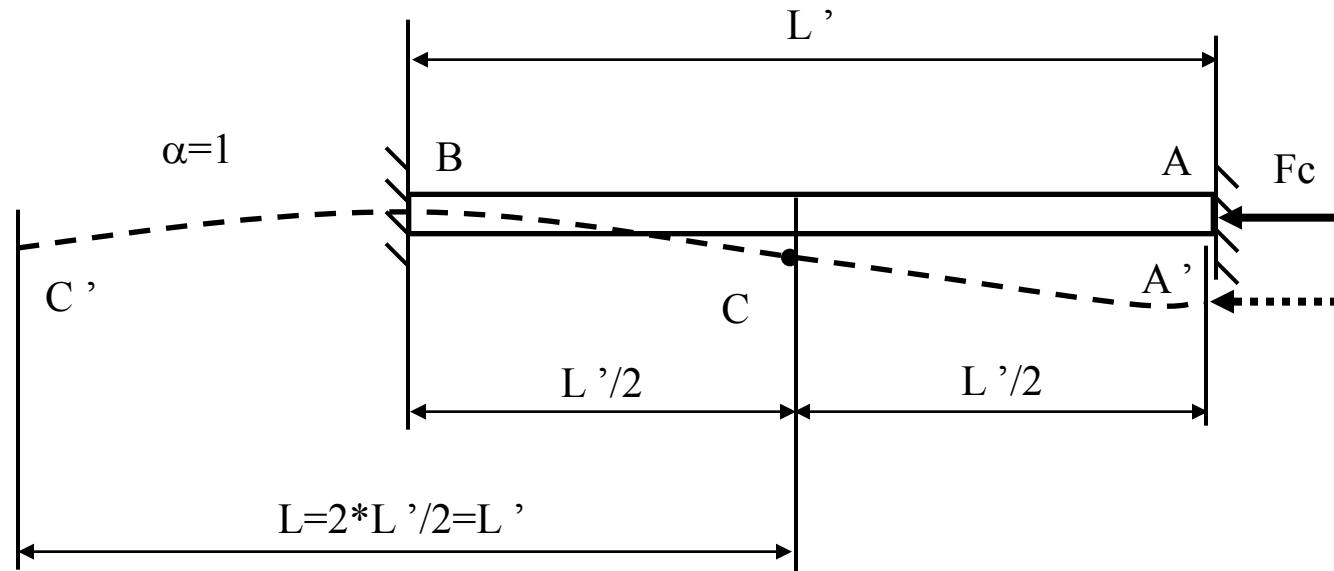
$$\alpha = \frac{1}{2}$$

On obtient donc :

$$F_c = \frac{4 * \pi^2 . EI}{L'^2}$$

La charge critique est donc quatre fois supérieure à celle de la même poutre articulée à ses 2 extrémités.

Si les encastremets ne sont pas fixés transversalement, les tangentes en A et B à la déformée ne sont plus assujetties à rester parallèles à AB.



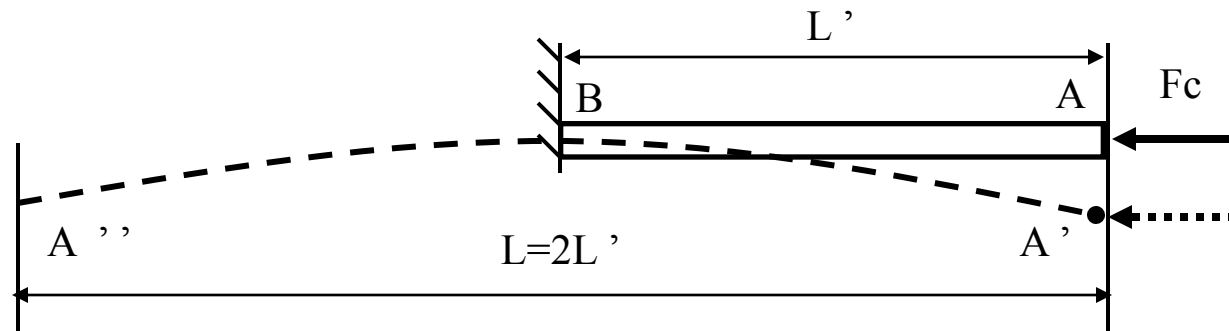
La déformée s'établira suivant une sinusoïde possédant un point d'inflexion au milieu C de AB.

$$L = 2 \frac{L'}{2} = L'$$

La charge critique est donc égale à celle de la même poutre articulée à ses 2 extrémités.

4.3. Poutre encastrée à une extrémité et articulée à l'autre

Si l'encastrement et l'articulation ne sont pas fixés transversalement, on retrouve le cas de la poutre libre en A et encastrée en B.

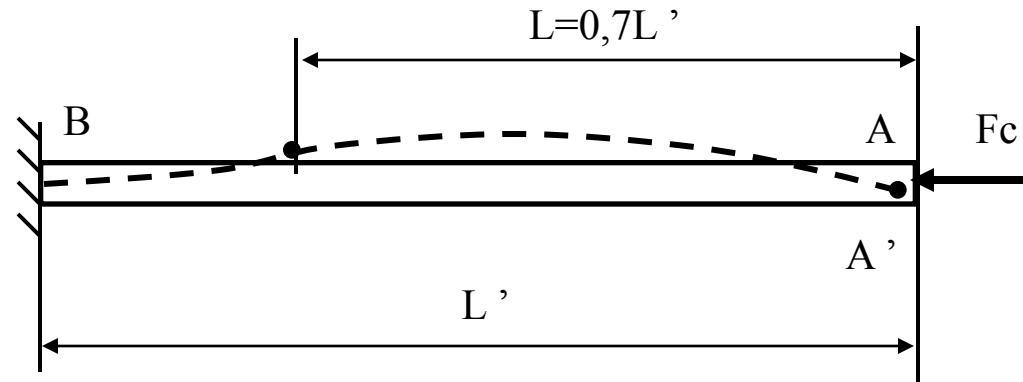


La charge critique d'Euler s'écrit donc :

$$F_c = \frac{\pi^2 \cdot EI}{4 \cdot L'^2}$$

La charge critique est donc quatre fois inférieure à celle de la même poutre articulée à ses 2 extrémités.

Si l'encastrement et l'articulation sont fixés transversalement, l'articulation en A ne peut alors se déplacer que suivant AB.



On démontre que dans ce cas, le coefficient d'encastrement a pour valeur :

$$\alpha = 0.698$$

$$\text{d'où } L = 0.698 * L' \approx 0.7 * L'$$

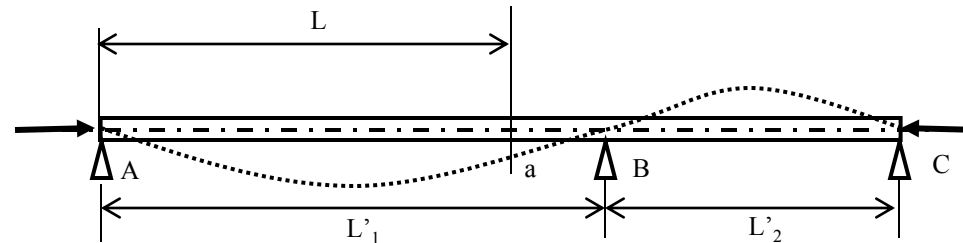
On a donc

$$F_c = \frac{2.05 * \pi^2 * EI}{L'^2}$$

La charge critique de flambage est donc environ deux fois plus grande que celle de la même poutre articulée à ses 2 extrémités.

4.4. Poutre sur 3 appuis

Soient L'_1 et L'_2 les distances entre appuis en posant : $L'_1 > L'_2$ et $k = \frac{L'_1}{L'_2}$



La déformée possède un point d'inflexion «a» situé dans la grande travée et la distance de ce point à l'appui extrême adjacent définit la longueur équivalente L .

On démontre que cette longueur a très sensiblement pour valeur : $L = \frac{L'_1}{\sqrt{2-k}}$

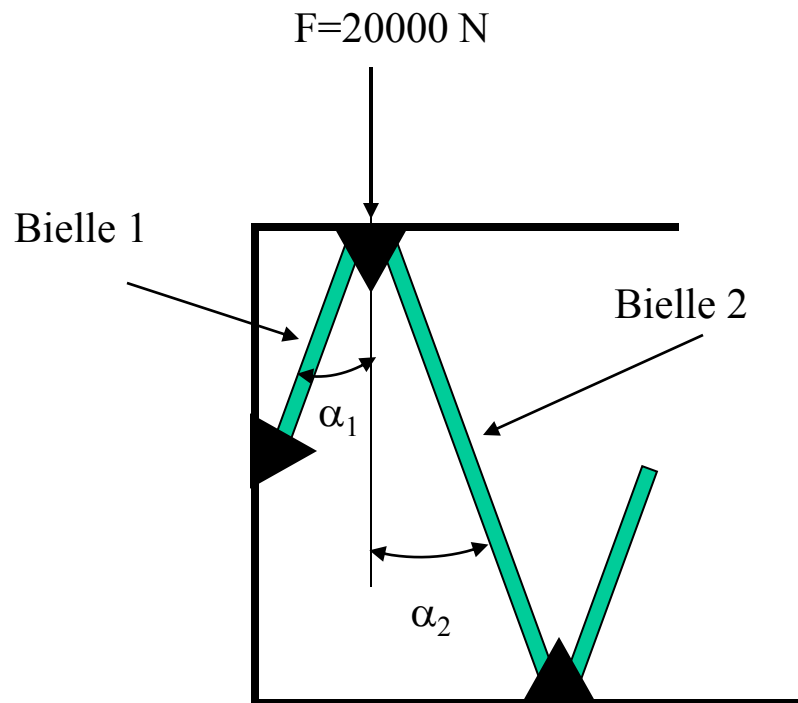
soit un coefficient d'encastrement affectant la longueur de la plus grande travée : $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2-k}}$

et une charge critique de flambage : $F_C = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2} = (2-k) \frac{\pi^2 \cdot EI}{L_1'^2}$

5 Pré-dimensionnement d'une nervure à bielles

On suppose une nervure à bielles soumise à de la compression. Toutes les bielles sont identiques.

Déterminez le diamètre des bielles. Le critère dimensionnant est la stabilité et les marges minimum doivent être de 30%.



Données :

tube : aluminium ($E=70000$ MPa)

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 30^\circ$$

$$L_1 = 333 \text{ mm}$$

$$L_2 = 1000 \text{ mm}$$

On dimensionne la bielle 2 car c'est la plus longue donc la plus sensible aux phénomènes d'instabilité

L'effort repris dans cette bielle est :

$$F_{bielle2} = F_{bielle1} = \frac{F}{2} * \frac{1}{\cos \alpha} * 1.3 = \frac{20000}{2} * \frac{1}{\cos 30} * 1.3 = 15011 \text{ N}$$

La formulation d'Euler donne :

$$F = \frac{\pi^2 . EIz}{L^2} = Fc$$

Avec $I = \frac{\pi . D^4}{64}$

Soit $D^4 = \frac{F * 64 * L^2}{\pi^3 . E} = \frac{15011 * 64 * 1000^2}{\pi^3 * 70000} = 442631 \text{ mm}^4$

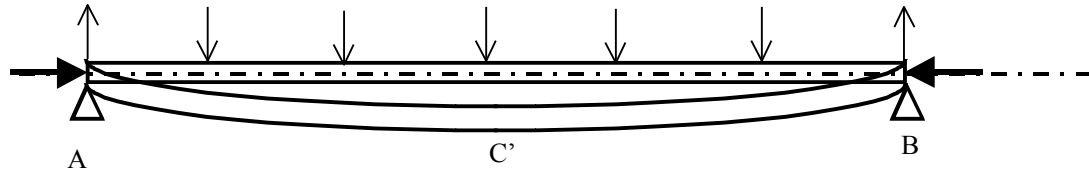
$$D > 25.8 \text{ mm}$$

Remarque : il est plus intéressant d'utiliser un tube circulaire creux pour diminuer la masse à iso-marge.

6. Flambage des poutres comprimées et fléchies

On considère maintenant une poutre rectiligne sur 2 appuis A et B soumise transversalement à des charges de flexion produisant un moment fléchissant M et une ligne élastique déformée AC'B de flèche y .

On superpose à ces charges un effort de compression F . Cet effort génère un moment fléchissant supplémentaire u . Le moment fléchissant total s'écrit : $M' = M + u > M$

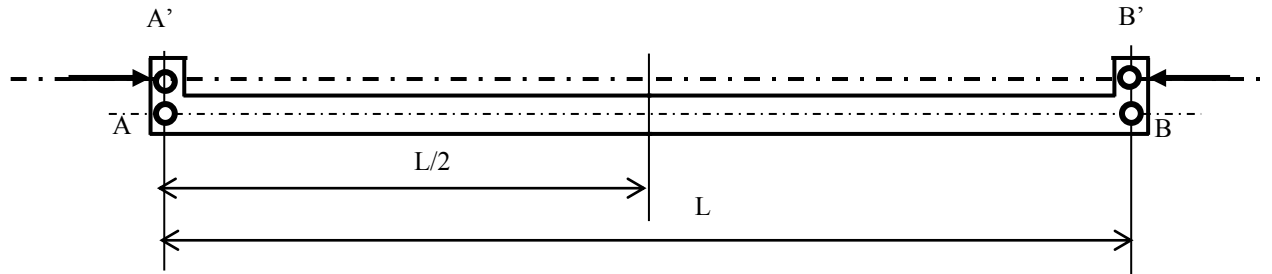


C'est ce moment amplifié qui doit entrer en ligne de compte pour composer les contraintes correspondantes à celle de F .

Remarque : si l'effort F est un effort de traction, l'effet produit sur les flèches et les moments serait inverse : diminution du moment et donc de la flèche.

6.1 Cas d'un moment fléchissant constant - Excentricité de la charge

On peut se placer dans un cas où la charge agit parallèlement à l'axe longitudinal de la poutre avec une certaine excentricité. On obtient : $M = F.d = \text{constante}$



On démontre que le moment fléchissant amplifié a pour valeur :

$$M'_{max} = \frac{M}{\cos u} \quad \text{soit} \quad M'_{max} = \frac{Fd}{\cos u}$$

avec : $u = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{F}{Fc}}$ en radians, soit en degrés : $u = 90 \sqrt{\frac{F}{Fc}}$

Ave F_c : la charge critique d'Euler de la poutre articulée à ses extrémités : $F_c = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2}$

Le terme «cos.u» est appelé cosinus amplificateur.

La contrainte résultante maximum de la poutre s'écrit :

$$\eta_r = \frac{F}{S} + \frac{M'_{max}}{I/V} \quad \text{soit} \quad \eta_r = F \left(\frac{1}{s} + \frac{d}{I/V \cdot \cos u} \right)$$

Remarques :

1/ Si $F=F_c$, alors $u = \frac{\pi}{2}$ d'où $\cos u = 0$ et $M' \rightarrow \infty$

La charge critique F_c constitue une limite jamais atteinte même si le déport d est très faible.

Ce phénomène s'observe lors d'essai mécanique où la poutre n'est jamais parfaitement rectiligne, la charge parfaitement alignée. Il peut donc y avoir un fléchissement de la poutre pour une charge inférieure à la charge critique. On parle alors pour la charge d'Euler de «limite supérieure jamais atteinte».

2/ La flèche maximale atteinte en C en position d'équilibre s'écrit : $y'_{max} = \frac{M}{8} \frac{L^2}{EI} \frac{2(1-\cos u)}{u^2 \cos u}$

Le terme $\frac{M}{8} \frac{L^2}{EI}$ correspond à la flèche d'une poutre soumise à un moment M constant. La flèche

totale est donc amplifiée par l'effort normal de compression.

En effet : $\frac{2(1-\cos u)}{u^2 \cos u} > 1$

6.2. Cas particulier d'un moment fléchissant non constant

Chaque cas de variation du moment fléchissant doit donner lieu à une étude particulière. Dans le cas où le moment fléchissant est maximum au centre de la poutre, il est cependant possible de déterminer, par des formules approchées, un «coefficient amplificateur» sous la forme :

$$K = 1 + 1.03 \frac{F}{F_c - F}$$

avec F_c la charge critique d'Euler de la poutre articulée à ses 2 extrémités.

Le moment fléchissant maximum amplifié au milieu de la poutre a donc pour valeur :

$$M'_{\max} = K M_{\max}$$

et la résultante maximum amplifiée au milieu de la poutre :

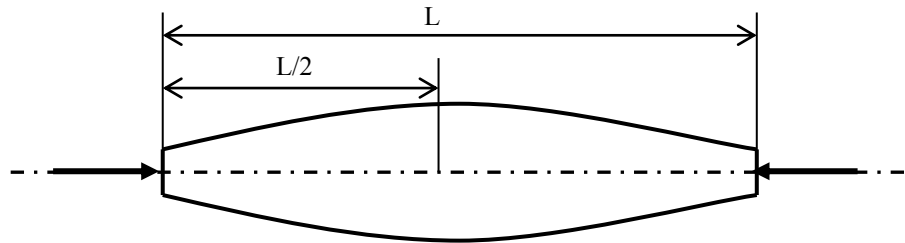
$$\eta_r = \frac{F}{S} + K \frac{M_{\max}}{I/V}$$

7. Flambage des poutres rectilignes de sections évolutives

Le problème doit se traiter au cas par cas. Il peut cependant être résolu par des formules approchées et des abaques utilisables :

- pour des poutres articulées à leurs 2 extrémités. I et S étant variables, la notion d 'élancement n 'a aucun sens dans ce cas
- Les résultats ne sont valables que dans le domaine de proportionnalité des matériaux.

7.1 Poutres dont les sections évoluent progressivement et symétriquement



Si I est le moment d 'inertie minimum et I' le moment d 'inertie maximum, la charge de flambage est donnée par :

$$F_c = \frac{8.EI'}{L^2} + \frac{1.92.EI}{L^2}$$

Cette formule peut-être utilisée avec une bonne approximation pour toutes les variations de sections avec les restrictions ci-dessus.

Exemple :

Calculer l'effort critique de flambage d'une bielle encastrée à une extrémité et libre à l'autre. Cette bielle est réalisée en aluminium et est de section circulaire. Le tube mesure 750 mm, son diamètre varie de 40 à 44 mm et d'épaisseur constante de 2 mm.

Déterminer au préalable la charge de flambage pour un tube circulaire $\phi = 40$ mm et $\phi = 44$ mm

$$I_{\text{mini}} = \frac{\pi(40^4 - 36^4)}{64} = 43215 \text{ mm}^4 \quad I_{\text{maxi}} = \frac{\pi(44^4 - 40^4)}{64} = 58320 \text{ mm}^4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F_{c_{\phi 44}} = \frac{\pi^2 * 70000 * 58320}{(750 * 2)^2} = 17900 \text{ N} \\ F_{c_{\phi 40}} = \frac{\pi^2 * 70000 * 43215}{(750 * 2)^2} = 13270 \text{ N} \end{array} \right.$$

D'où la charge de flambage du tube de section variable :

$$F_c = \left(\frac{8 * 70000 * 58320}{(750 * 2)^2} + \frac{1.92 * 70000 * 43215}{(750 * 2)^2} \right) = 17100 \text{ N}$$

Remarques :

Si la section est constante on retrouve : $F_c = \frac{8.EI'}{L^2} + \frac{1.92.EI}{L^2} = \frac{9.92.EI}{L^2}$

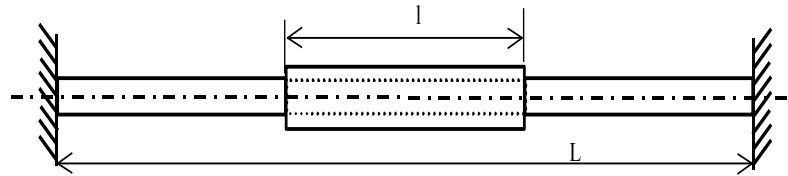
Soit un écart de l'ordre de 5% par rapport à la formulation d'Euler.

7.2. Poutre renforcée sur une partie de sa longueur

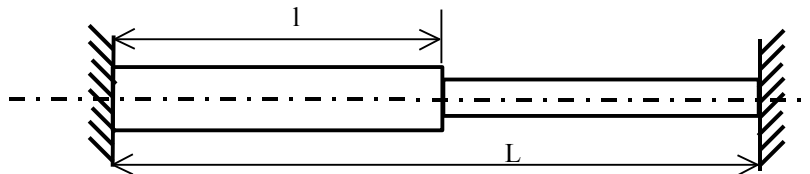
Pratiquement, pour augmenter la charge de critique de flambage de barres pour lesquelles la solution d'un renfort local de flambage est aussi celle du poids minimum.

Des abaques (planches suivantes) permettent de déterminer la charge critique de flambage pour :

- des poutres longues renforcées en leur milieu,



- des poutres longues renforcées à une extrémité.



Ces charges sont exprimées en fonction de la **charge d'Euler de la poutre non renforcée**. La comparaison des 2 diagrammes montre que la solution avec renfort central est meilleure que la solution avec renfort à une extrémité.

La solution avec renfort à une extrémité se rencontre pour des pièces sous-dimensionnées qui ont été renforcées sans modifier leurs attaches.

Exemple :

On a vu, dans le cours précédent que la tenue au flambage d'une bielle de commande était 6 fois inférieure à la tenue en compression.

Rappel : la charge d'Euler est :

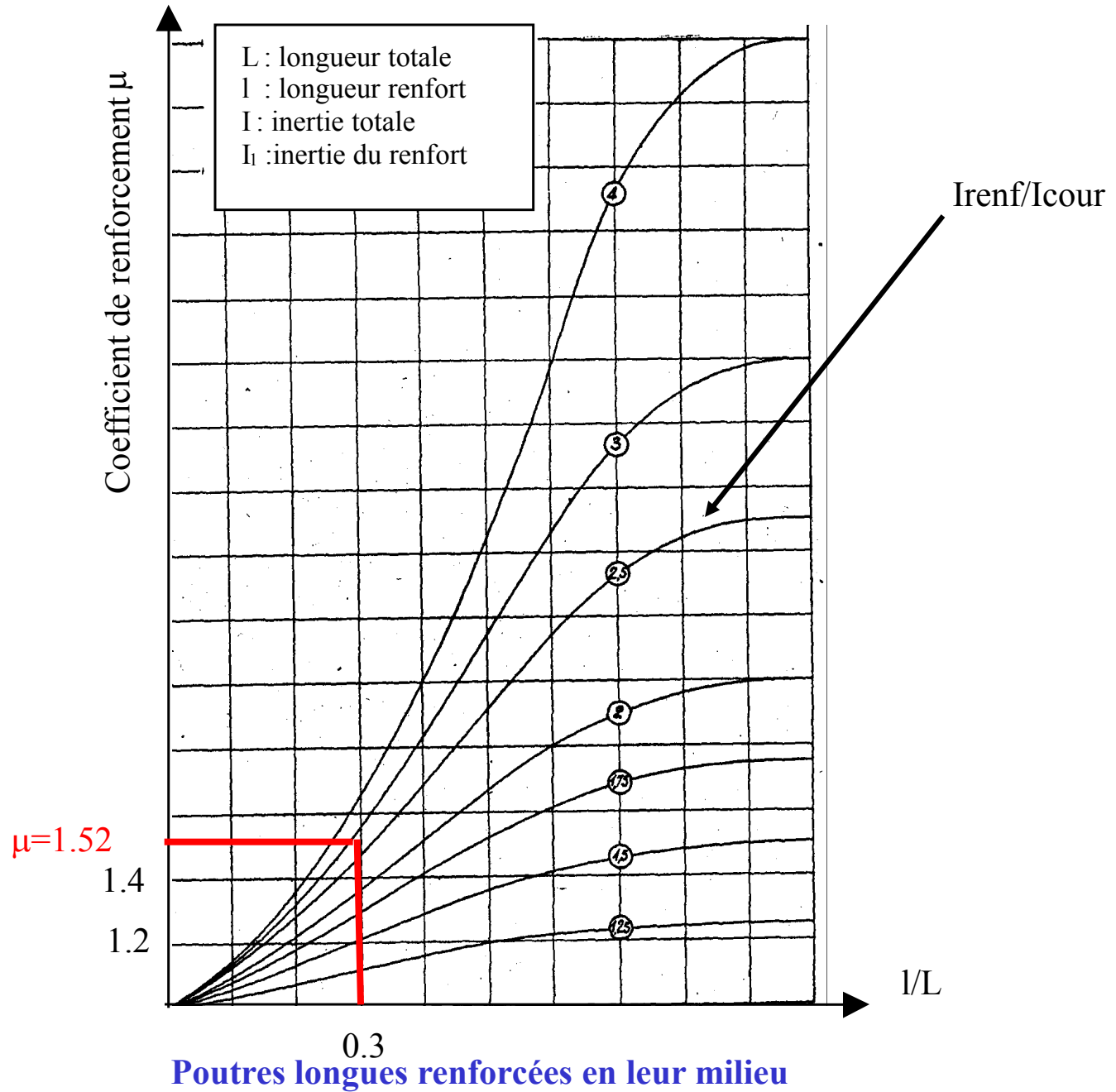
$$F = \frac{\pi^2 . EI}{L^2} = \frac{\pi^2 . 200000 . 33666}{1500^2} = 29500N$$

On soude un renfort de 2 mm d'épaisseur et de longueur 450 mm sur le tube.

Les paramètres du renfort sont : $\frac{l_{renfort}}{L_{poutre}} = \frac{450}{1500} = 0.3$ et $\frac{I_{zonerenfort}}{I_{zonecourante}} = 2.73$

d'où d'après l'abaque 1 : $\mu = 1.52$

Soit une charge de flambage de la poutre renforcée de $1.52 * 29500 = 44840 N$



8. Remarques et discussion

- **Limite d'utilisation** : La formule d'Euler traduit un état d'équilibre élastique, cette approche du flambage n'est donc valable que si la contrainte de flambage est inférieure à la contrainte de limite élastique.

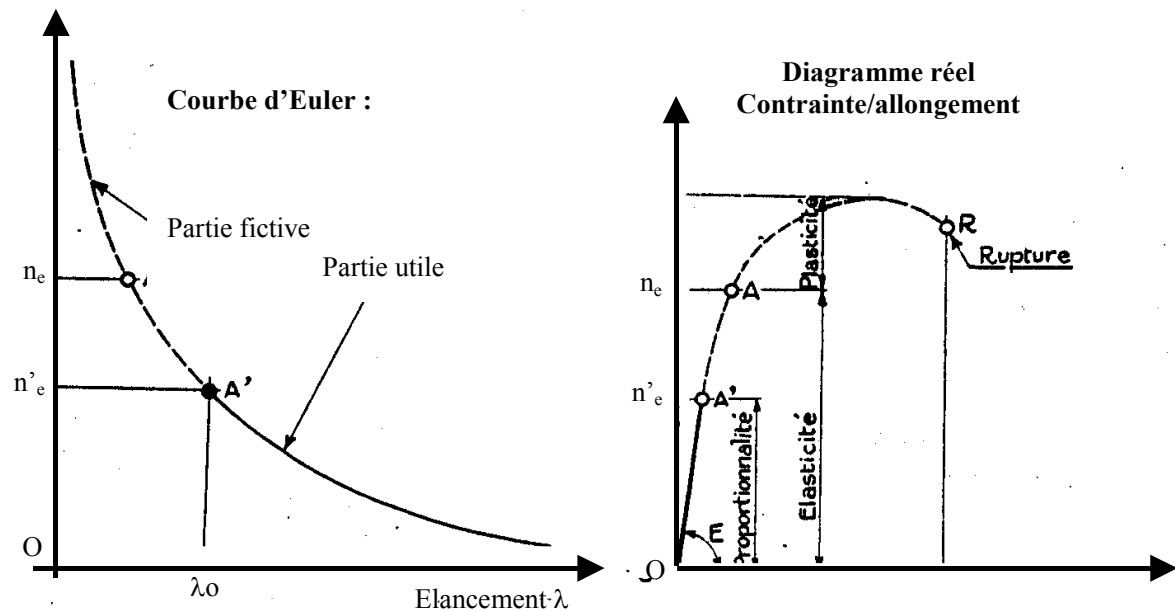
Contrairement à ce qui est pratiqué en résistance des matériaux classique, on peut distinguer la limite de proportionnalité réelle de la limite élastique des matériaux. Cette limite correspond à la période OA' sur le diagramme contrainte/allongement représenté ci-dessous où le relation contrainte/allongement est rigoureusement linéaire.

On désigne n'_e par la contrainte correspondant à cette limite de proportionnalité en compression simple. Ces résultats sont identiques en traction.

avec : $n_{e\lambda} < n'_e$

et
$$n_{e\lambda} = \frac{\pi^2 E}{\lambda_o^2}$$

soit
$$\lambda_o = \pi \sqrt{\frac{E}{n'_e}}$$



- **Traitement thermique** : seul le module d'élasticité (E 'YOUNG) est pris en compte dans la formulation d'Euler. En effet la charge critique est indépendante des contraintes admissibles des matériaux utilisés et donc de leurs traitements thermiques.

Il est donc inutile de traiter thermiquement un matériau pour augmenter sa tenue au flambage.

- **Certification des structures aéronautiques** : le flambage n'est pas autorisé avant les charges limites.

Il peut être cependant accepté localement, on parle alors de flambage local ou cloquage. La charge appliquée doit alors être au moins égale à 0.8 fois la charge limite.

Ce point sera repris dans le cours sur les panneaux raidis.

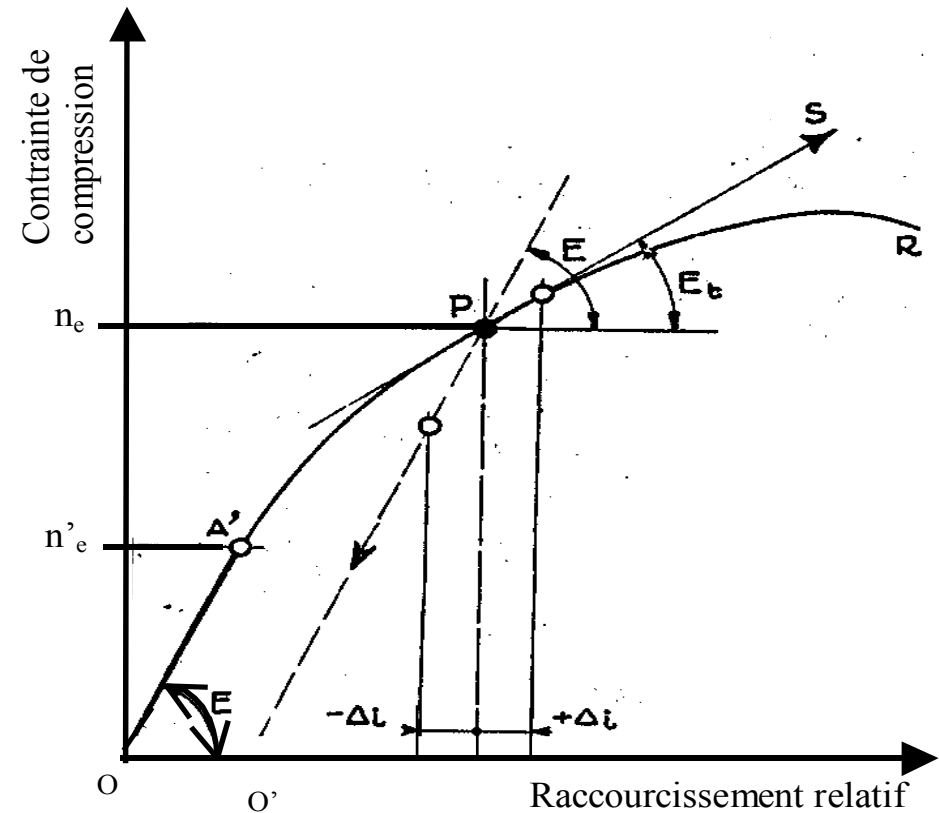
9. Flambage des poutres courtes - Théorème du module réduit de Karman

On a vu que l'utilisation de la formule d'Euler est limitée à un certain élément limite λ_0 correspondant à une contrainte de compression égale à la limite de proportionnalité du matériau.

Considérons maintenant une poutre dont l'élançement est inférieur à l'élançement limite λ_0 ; on se trouve dans le cas d'une poutre appelée poutre courte. Dans ce cas, le flambage peut se produire au-delà de la limite de proportionnalité, c'est à dire soit en période élastique non proportionnelle soit en période plastique.

On appelle E_t « module tangent » le module défini par la tangente à $OA'R$ au point P . Ce module varie en chaque point et est différent du module d'origine E considéré jusqu'à présent.

Remarque : on considère, comme pour les poutres longues que la poutre est rectiligne sans variation de section.



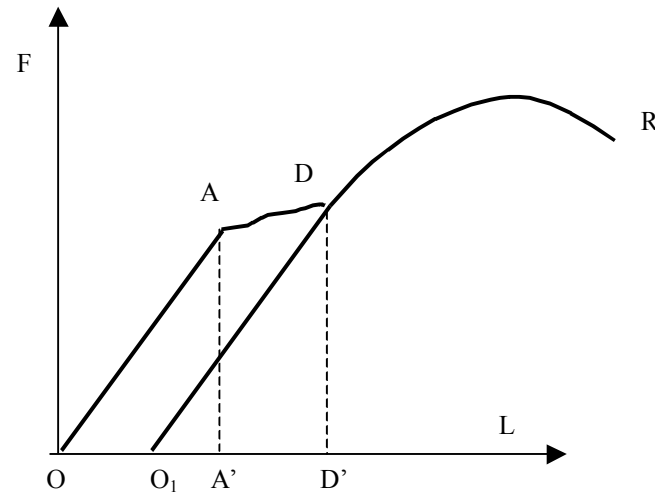
9.1 Matériau non écouissable

La charge critique d'Euler est donnée par :

$$F_C = \frac{\pi^2 \cdot E_t I}{L^2}$$

9.2. Matériau écouissable

Ce cas correspond en fait, au cas réel. En effet, pour les métaux usuels tout dépassement de la limite de proportionnalité donne lieu à un phénomène d'écrouissage.



On définit alors une valeur E_r , homogène au module d'élasticité.

Cette valeur désigne le «module réduit de flambage». Son expression est fonction de la section, mais en pratique, la variation due au changement de section est négligeable. Il est donc possible, avec une excellente approximation, d'utiliser la formule suivante :

$$E_r = \frac{3.6E.E_t}{\left(\sqrt{E} + 0.9\sqrt{E_t}\right)^2}$$

La formule d'Euler généralisée aux poutres courtes s'écrit donc :

$$F_C = \frac{\pi^2 . E_r I}{L^2}$$

ou

$$\eta_r = \frac{\pi^2 E_r}{\lambda^2}$$

Remarques :

1/ Il existe de nombreuses formulations empiriques (formules de Rankine, de Johnson ou de Stand) pour définir la charge de flambage mais elles sont toutes plus conservatives que la formulation d'Euler donc très peu utilisées.

2/ Le flambage, dans le domaine plastique est lié à l'état d'utilisation du matériau. En effet, cet état influe directement sur le module réduit.

Contrairement, aux poutres longues, les charges de flambage des poutres courtes sont tributaires des traitements thermiques des matériaux qui les constituent.

10. Flambage local

Le flambage local est un phénomène d'instabilité prenant naissance dans une zone localisée de la poutre.

Cette instabilité ne conduit pas, contrairement au flambage général, à un effondrement immédiat de la structure mais peut limiter la tenue de la structure.

On désigne donc par η_{co} la contrainte de compression simple donnant lieu à l'apparition du flambage local. Cette contrainte est indépendante de la longueur de la poutre et est exprimée en fonction d'un «indice de minceur» caractéristique de la section droite.

Il n'existe pas de formules générales permettant de traiter ce type d'instabilité.

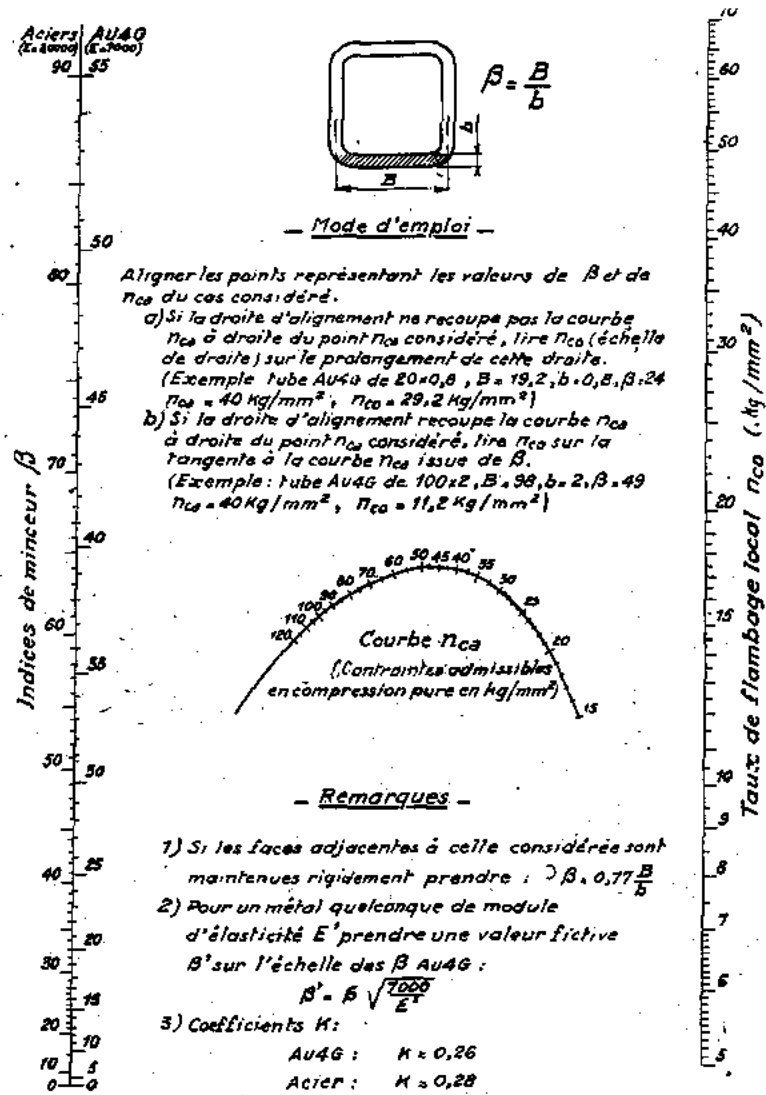
10.1. Utilisation d'abaques

Des abaques permettent de déterminer la contrainte de flambage local pour :

- des cornières à ailes égales
- des tubes carrés
- des tubes circulaires

Ces abaques sont déterminées en fonction de 2 paramètres β et K :

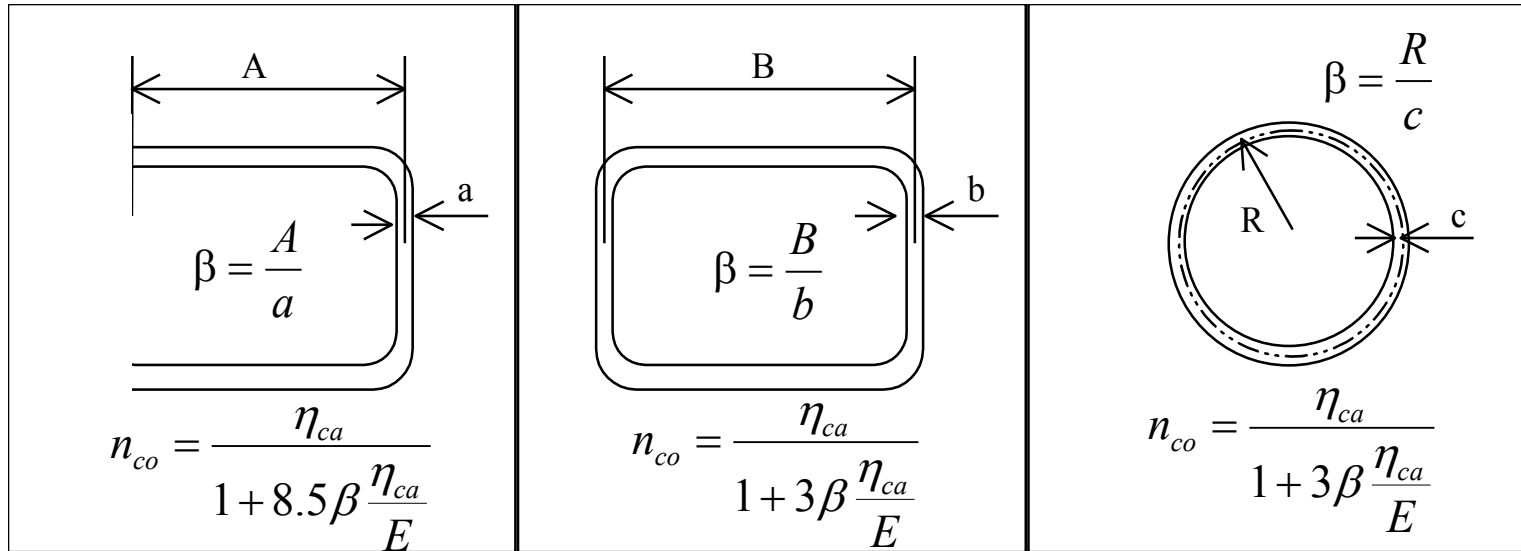
- β est l'indice de minceur. Il «remplace» le coefficient d'élanement utilisé précédemment,
- K est un coefficient qui intègre l'influence des paramètres propres à chaque section et matériau.



Tube de section carrée

10.2 Formules empiriques

Trois formules empiriques sont présentées dans le tableau ci-dessous :



η_{ca} = contrainte adm du matériau
 η_{c0} = contrainte de flambage local

Remarque : Si l'on compare les résultats obtenus par les abaques et les formules ci dessus, on remarque que la concordance entre les 2 valeurs est assez lointaine.

Par exemple, pour un tube carré en AU4G de 64*64*2 et $\eta_{ca} = 400$ MPa

On obtient

- par les abaques : $\eta_{co} = 237$ MPa

- par les formules : $\eta_{co} = 261$ MPa

Cette dispersion des résultats s'explique par le fait que les essais sont très délicats à mettre en place (faibles dimensions des éprouvettes, conditions aux limites...)

11. Conclusion

Pour les structures soumises à de la compression il est nécessaire de déterminer les charges d'instabilité car elles peuvent conduire à une **rupture brutale, voire explosive**.

La **formule d'Euler** donne, en première approximation, une estimation assez juste de cette charge de flambage. Elle est couramment utilisée pour le pré-dimensionnement des structures aéronautiques métalliques ou composites.

Remarques:

- 1/ Ces résultats seront repris pour le calcul des panneaux autoraidis (stabilité du panneau, des mailles et des raidisseurs).
- 2/ Pour des cas complexes (non planéité de la poutre, chargements complexes...), cette approche n'est pas suffisante et il faut avoir recours, en général, à des modélisations par éléments finis.

12. Résumé des formulations à retenir

- FORMULE D'EULER ET LES HYPOTHESES ASSOCIEES

$$\boxed{F_c = \frac{\pi^2 \cdot EI_z}{L^2}}$$

poutre articulée à ses 2 extrémités

- NOTION DE LONGUEUR LIBRE AU FLAMBAGE (EULER GENERALISE)

$$\boxed{F_c = \frac{\pi^2 \cdot EI}{L^2} = \frac{\pi^2 \cdot EI}{\alpha^2 L'^2}}$$

L' est la longueur réelle
 L est la longueur équivalente

$\alpha = 2$	encastrée/libre
$\alpha = 1/2$	encastrée/encastrée (fixées transversalement)
$\alpha = 1$	encastrée/encastrée (non fixées transversalement)
$\alpha = 0.7$	encastrée/articulée (fixées transversalement)