calcul de structure

résistance des matériaux

introduction

Elle est basée sur l'étude des structures de type poutre. Les principales étapes de la procédure de dimensionnement sont les suivantes

. modélisation mécanique
. calcul des efforts de liaisons (réactions)
. calcul des sollicitations
. calcul des contraintes ou des déplacements
. application de critères de dimensionnement

La première étape de modélisation mécanique peut se décomposer de la façon suivante:

. détermination de la géométrie
. caractérisation du matériau
. détermination des liaisons avec l'extérieur (réactions, conditions limites)
. détermination des efforts et des chargements
. détermination du type de modèle (poutres, plaques, coques, volumes)

statique

introduction

La statique permet de modéliser les efforts et d'écrire les conditions d'équilibre d'une pièce. Cela permet de calculer des réations donc des efforts sur une pièce, de calculer des sollicitations donc des efforts internes à l'intérieur d'une pièce

modélisation des efforts

introduction

Les efforts en statique sont soit des

. forces
. moments
. couples
. résultantes

que l'on peut modéliser en 2 ou 3 dimensions. On utilise quelquefois la notion de torseur pour regrouper l'ensemble des forces et moments en un point.

efforts en 2 dimensions

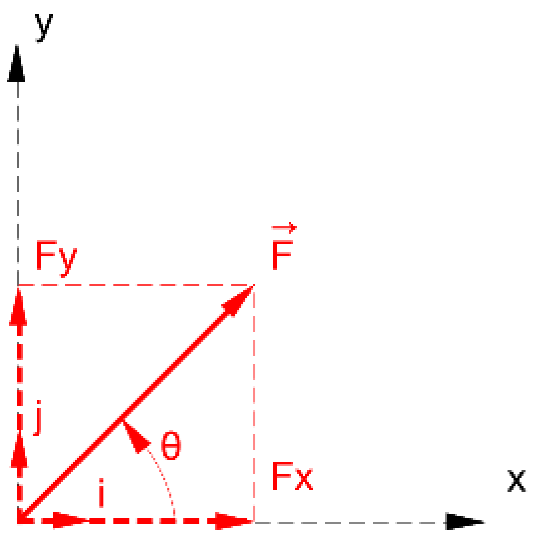
introduction

Les efforts en 2d sont soit des

- forces
- moments
- couples
- résultantes

forces en 2 dimensions

composantes



composantes

On a:

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$$

$\vec{F}$
: vecteur force

F_x
: composante de la force suivant l'axe x

F_y
: composante de la force suivant l'axe y

$\vec{i}$
: vecteur unitaire suivant l'axe x

$\vec{j}$
: vecteur unitaire suivant l'axe y

Il est quelquefois nécessaire de calculer les composantes de la force connaissant l'angle et la valeur de la force. On utilise alors:

$$F_x = F\cos\theta$$

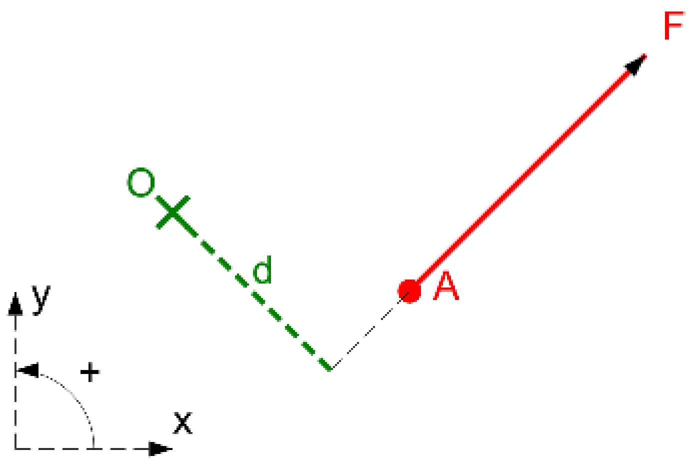
$$F_y = F\sin\theta$$

On peut également calculer l'intensité de la force à partir de ses composantes en utilisant:

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2}$$

moments en 2 dimensions

introduction



Moment

Le moment résultant de l'action de la force par rapport à un axe perpendiculaire au plan passant par le point O est:

$$M = Fd$$

M
: moment du à la force autour de l'axe perpendiculaire au plan passant par O

F
: valeur absolue (intensité) de la force

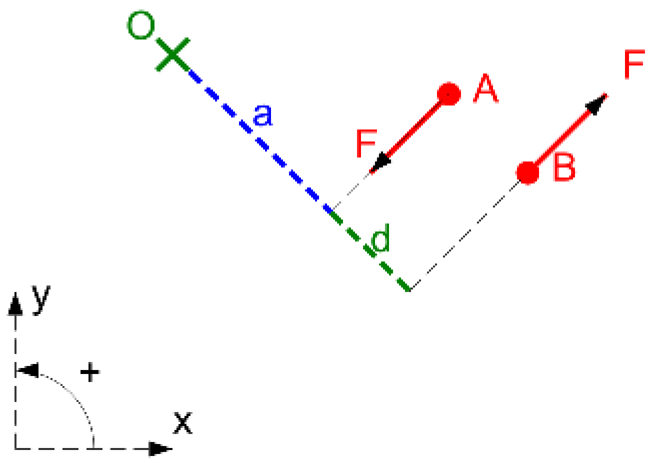
d
: distance (valeur absolue) du point O au point A

Remarque 1:
: Le signe du moment est ici donné par la convention adoptée pour le repère

Remarque 2:
: On peut également utiliser la notion de produit vectoriel pour définir le moment de façon plus rigoureuse.

couple en 2 dimensions

introduction



Couple

Suivant la figure on peut écrire:

$$M = F(a+d) - Fa$$

et donc:

$$M = Fd$$

F
: intensité de la force

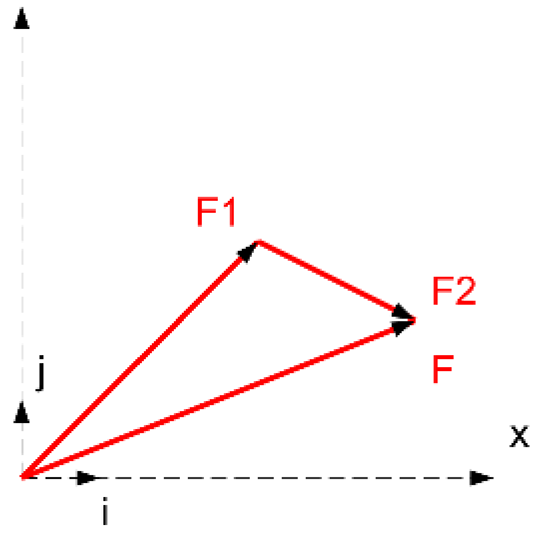
d
: distance entre les deux forces

a
: distance indiquée sur la figure

Deux force égales et opposées créent un couple indépendant de la distance à l'axe de rotation.

résultantes en 2 dimensions

somme de forces



somme de forces

La résultante de 2 forces s'exerçant au même point est donnée par la somme des deux vecteurs. On a:

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Les composantes de la force résultante sont les suivantes:

$$F_x = F_{1x} + F_{2x}$$

$$F_y = F_{1y} + F_{2y}$$

F_x
: composante suivant x de la force résultante F

F_y
: composante suivant y de la force résultante F

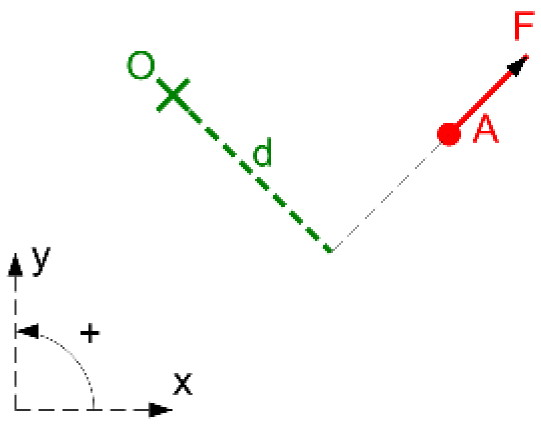
F_{1x}
: composante suivant x de la force résultante F_1

F_{2x}
: composante suivant x de la force résultante F_2

F_{1y}
: composante suivant y de la force résultante F_1

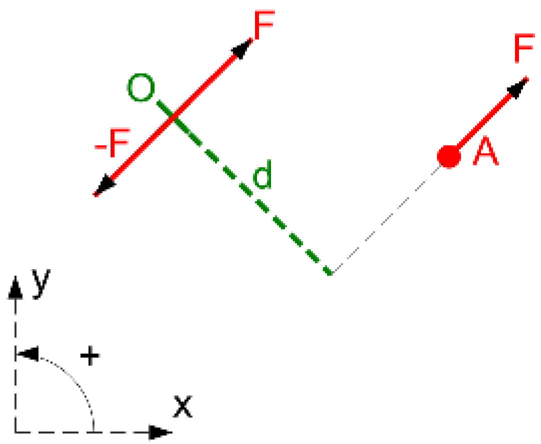
F_{2y}
: composante suivant y de la force résultante F_2

transfert d'une force



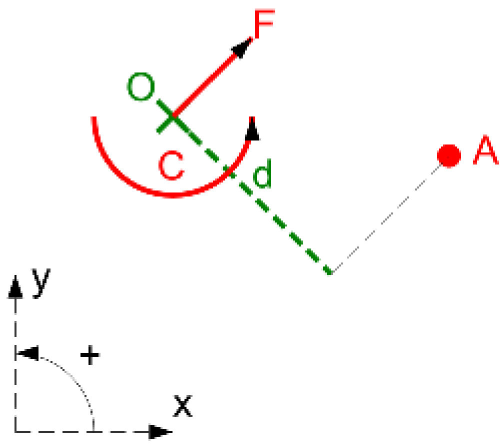
transfert d'une force 1

On souhaite connaître les efforts au point O dus à la force F appliquée au point A. Pour cela on recherche un système équivalent au système ci-dessus. On l'obtient en ajoutant la force F et son opposée au point O



transfert d'une force 2

Le groupe de forces F et $-F$ peut être assimilé à un couple et on obtient ainsi le système équivalent suivant:



transfert d'une force 3

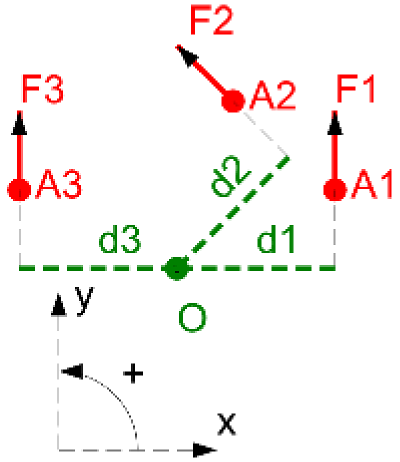
Ce raisonnement permet de trouver le système d'efforts (force + couple) en O équivalent à la force en A. Ceci est peut être utile pour le dimensionnement d'un composant, une vis par exemle située au point O.

résultante

L'action de plusieurs forces sur une pièce considérée rigide peut être ramenée à l'action d'une seule force et d'un couple ou même à une seule force : la résultante. Pour calculer la résultante:

- on fait la somme de toutes les forces
- on fait la somme de tous les moments par rapport à un axe perpendiculaire passant par un point O choisi en considérant leurs signes

On obtient ainsi un système équivalent force + moment qui peut être ramené à une seule force: la résultante. Pour le cas de 3 forces on peut procéder de la façon suivante.



résultante

La résultante des efforts F_1, F_2, F_3 est:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

De plus le moment résultant est:

$$M = \sum_{i=1}^{n} F_i d_i = F_1 d_1 + F_2 d_2 - F_3 d_3$$

exercices de statique 2d

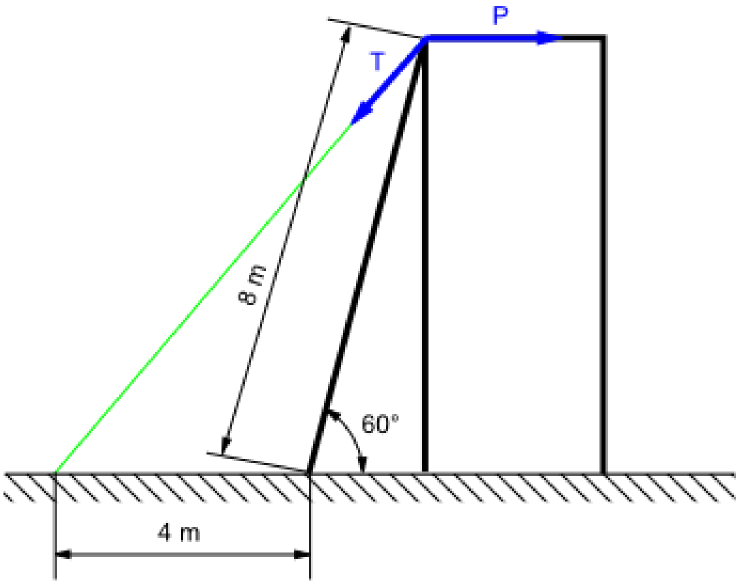
présentation

On présente ici des exercices qui permettent de se familiariser avec les notions de forces, couples, moments, résultante et équilibre statique des structures qui sont très utilisées en résistance des matériaux.

exercice numéro 1

présentation

Le but de cet exercice est de calculer des composantes de forces suivant des directions données. La figure ci-dessous présente la structure à étudier composée de poutres.

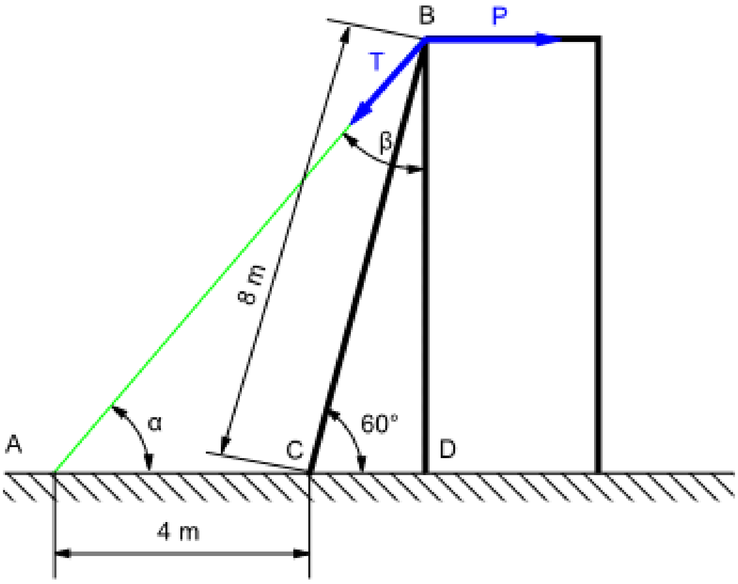


structure à étudier

question n° 1

Calculer et représenter la force R équivalente aux deux efforts P et T sachant que P vaut 1000 N et T vaut 400 N.

solution n° 1



schéma

Les composantes de la force résultante des 2 forces sont les suivantes:

$$R_y = -T\cos\beta$$

$$R_x = P - T\sin\beta$$

On peut calculer les angles en utilisant les triangles rectangles sur le schéma

$$\beta = 90 - \alpha$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{AD}}$$

On calcule les longueurs

$$\mathrm{AD} = \mathrm{CD} + 4$$

$$\mathrm{BD} = 8\sin(60)$$

$$\mathrm{CD} = 8\cos(60)$$

On obtient donc pour les angles:

$$\alpha = 40{,}89$$

$$\beta = 49{,}1$$

résultat n° 1

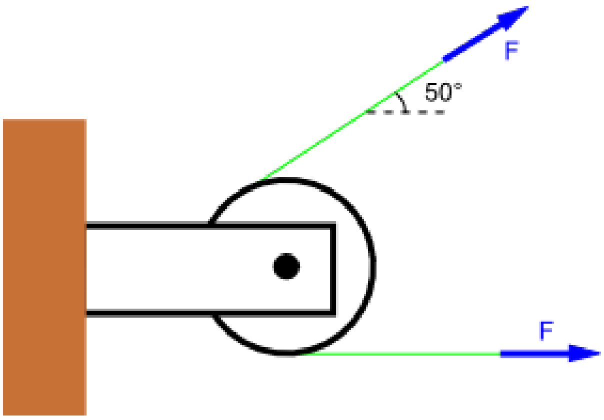
$$R_x = 698\ \mathrm{N}$$

$$R_y = -262\ \mathrm{N}$$

exercice numéro 3

présentation

Le but de cet exercice est de calculer l'angle d'une force par rapport à un axe et par rapport à un plan.
La figure ci-dessous présente la structure à étudier.



structure à étudier

La tension dans le câble est F et vaut 1000 N.

question n° 1

Déterminer les composantes et l'amplitude de l'effort sur l'axe de la poulie.

solution n° 1

$$R_x = 1000 + 1000\cos 50$$

$$R_y = 1000\sin 50$$

résultat n° 1

En remplaçant dans les équations ci-dessus on obtient pour les composantes de la force sur l'axe:

$$R_x = 1643 \quad \mathrm{N}$$

$$R_y = 766 \quad \mathrm{N}$$

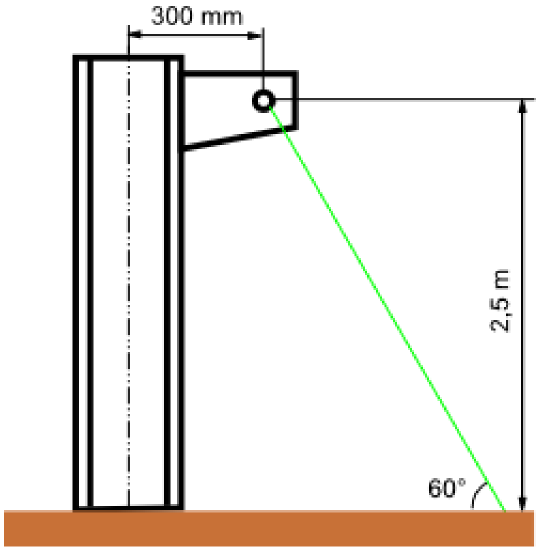
Le module de la force sur l'axe est donc:

$$R = 1813 \quad \mathrm{N}$$

exercice numéro 4

présentation

Le but de cet exercice est de calculer les efforts au pied du poteau du à une tension dans le câble de 1200 N.



structure à étudier

question n° 1

Calculer le moment exercé par la force par rapport au pied du poteau.

solution n° 1

L'expression du moment en pied de poteau est la suivante:

$$M_o = -1200\ 2{,}5\cos(60) - 1200\ 0{,}3\sin(60)$$

résultat n° 1

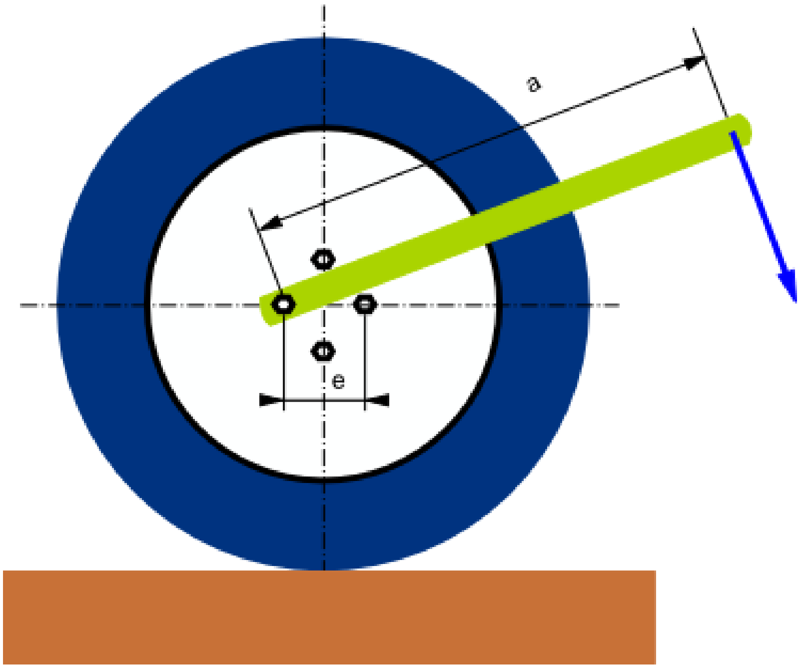
Le calcul donne pour le moment en pied de poteau:

$$M_o = -\ 1812\ \mathrm{Nm}$$

exercice numéro 5

présentation

Le but de cet exercice est de calculer le moment résultant par rapport au centre de la roue. La figure ci-dessous présente la structure à étudier.



structure à étudier

Les données sont les suivantes: la longueur de la clé a est de 300 mm, l'entraxe des vis e est de 80 mm, l'angle α de la clé par rapport à l'horizontal est de 30°.

question n° 1

Déterminer le moment de la force exercée par la clé par rapport au centre de la roue.

solution n° 1

Les composantes de la force suivant les axes horizontal et vertical sont:

$$F_x = F\sin(\alpha)$$

$$F_y = F\cos(\alpha)$$

Le moment au centre de la roue est le suivant:

$$M_o = -\left[a\cos(\alpha) - \frac{e}{2}\right]F_y - F_x[a\sin(\alpha)]$$

résultat n° 1

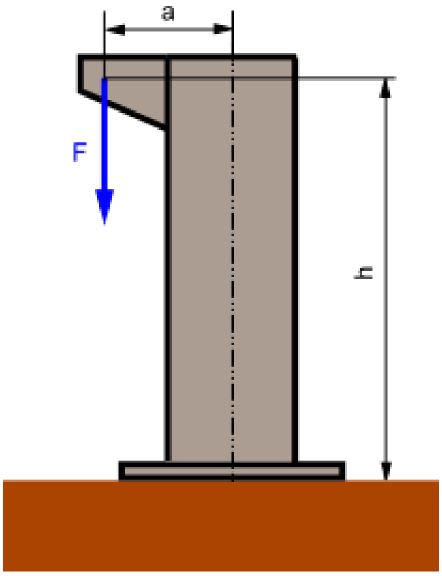
On obtient pour le moment au centre de la roue:

$$M_o = -66{,}3 \quad \text{Nm}$$

exercice numéro 6

présentation

Le but de cet exercice est de calculer l'effet de la force à la base de la poutre. La figure ci-dessous présente la structure à étudier.



structure à étudier

Les données sont:

$$h = 2500 \text{ mm}$$

h
: hauteur du point d'application de la force

$$a = 500 \text{ mm}$$

a
: distance du point d'application de la force par rapport au centre de la poutre

$$F = 3 \text{ kN}$$

F
: force

question n° 1

Calculer le moment et la force à la base de la poutre au centre de la section dus à la force appliquée.

solution n° 1

Le moment au centre de la section à la base de la poutre sont:

$$M = Fa$$

F
: force

h
: hauteur du point d'application de la force

La force au centre de la section à la base de la poutre est identique à la force appliquée

résultat n° 1

Le moment à la base de la poutre vaut:

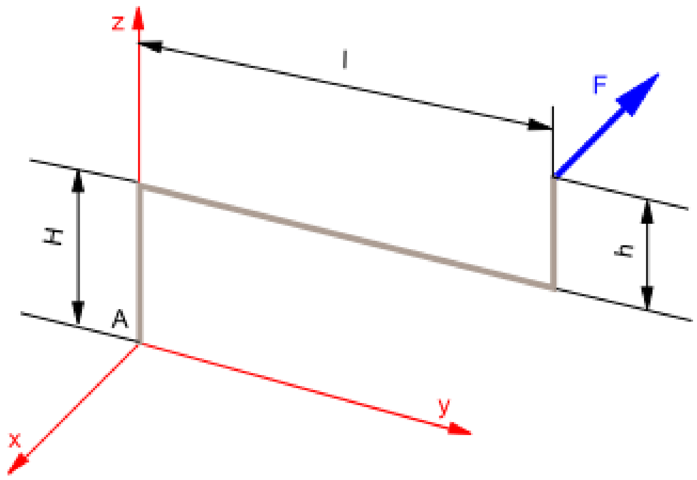
$$M = 1500 \quad \mathrm{Nm}$$

La force est identique à F.

exercice numéro 7

présentation

Le but de cet exercice est de calculer le moment résultant par rapport au point A. La force est orientée suivant l'axe x. La figure ci-dessous présente la structure à étudier.



structure à étudier

Les données sont les suivantes:

$$F = 300.\ \mathrm{N}$$

$$H = 40\ \mathrm{mm}$$

$$h = 20\ \mathrm{mm}$$

$$l = 250\ \mathrm{mm}$$

question n° 1

Déterminer le moment au point A du à l'effort sur la poignée.

solution n° 1

Le moment au point A autour de l'axe y est donné par:

$$\mathrm{MA}_y = -F(H+h)$$

Le moment au point A autour de l'axe z est donné par:

$$\mathrm{MA}_z = Fl$$

Le moment résutant est donné par:

$$M_A = \sqrt{\mathrm{MA}_y^{\,2} + \mathrm{MA}_z^{\,2}}$$

résultat n° 1

En remplaçant par les valeurs numériques on obtient:

$$\mathrm{MA}_y = -18\ \mathrm{Nm}$$

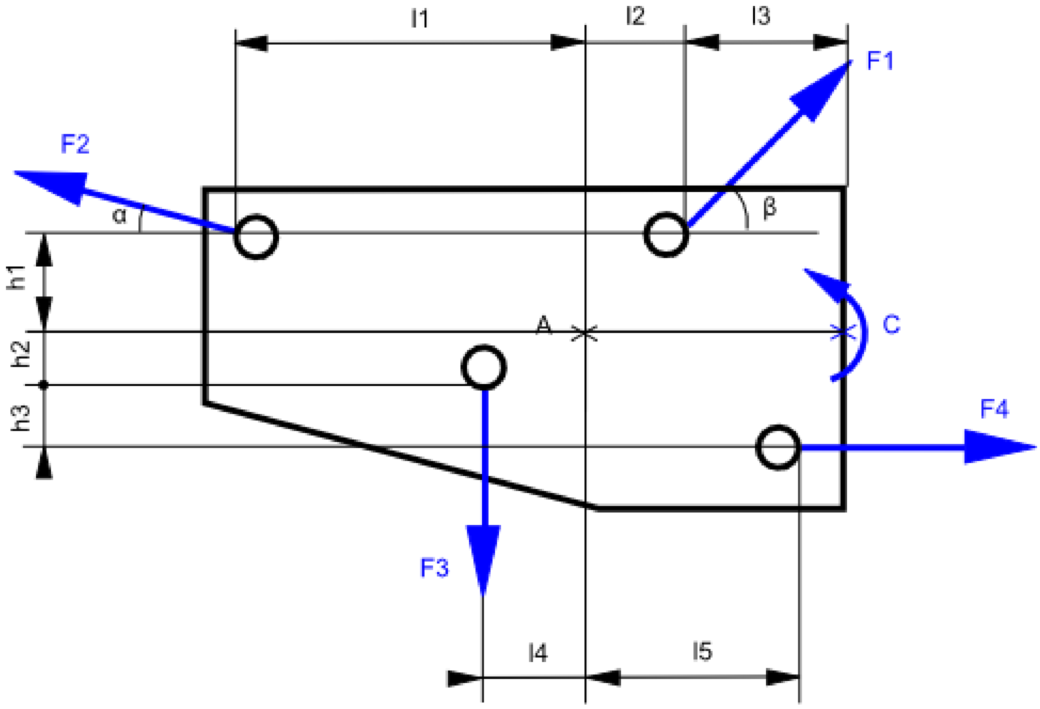
$$\mathrm{MA}_z = 75\ \mathrm{Nm}$$

$$M_A = 77{,}2\ \mathrm{Nm}$$

exercice numéro 8

présentation

Le but de cet exercice est de calculer la résultante des efforts sur une pièce. La figure ci-dessous présente la structure à étudier.



structure à étudier

Les données sont les suivantes:

$$F1 = 1000\ \text{N}$$

$$F2 = 500\ \text{N}$$

$$F3 = 2500\ \text{N}$$

$$F4 = 1200\ \text{N}$$

$$C = 12\ \text{Nm}$$

$$l1 = 100\ \text{mm}$$

$$l2 = 20\ \text{mm}$$

$$l3 = 50\ \text{mm}$$

$$l4 = 25\ \text{mm}$$

$$l5 = 60\ \text{mm}$$

$$h1 = 40\ \text{mm}$$

$$h2 = 15\ \text{mm}$$

$$h3 = 20 \text{ mm}$$

question n° 1

Calculer la résultante par rapport au point A.

solution n° 1

Les composantes suivants les axes x (horizontal) et y (vertical) sont:

$$R_x = \mathrm{F1}\cos(\beta) - \mathrm{F2}\cos(\alpha) + \mathrm{F4}$$

$$R_y = \mathrm{F1}\sin(\beta) + \mathrm{F2}\sin(\alpha) - \mathrm{F3}$$

Le moment par rapport au point A est:

$$\mathrm{MA}_z = -\mathrm{F1}\cos(\beta)\mathrm{h1} + \mathrm{F2}\cos(\alpha)\mathrm{h1} + \mathrm{F4}(\mathrm{h2}+\mathrm{h3}) + \mathrm{F1}\sin(\beta)\mathrm{l2} - \mathrm{F2}\sin(\alpha)\mathrm{l1} - \mathrm{F3}\mathrm{l4} + C$$

résultat n° 1

Les composantes de la résultante et le moment sont:

$$R_x = 1425\ \mathrm{N}$$

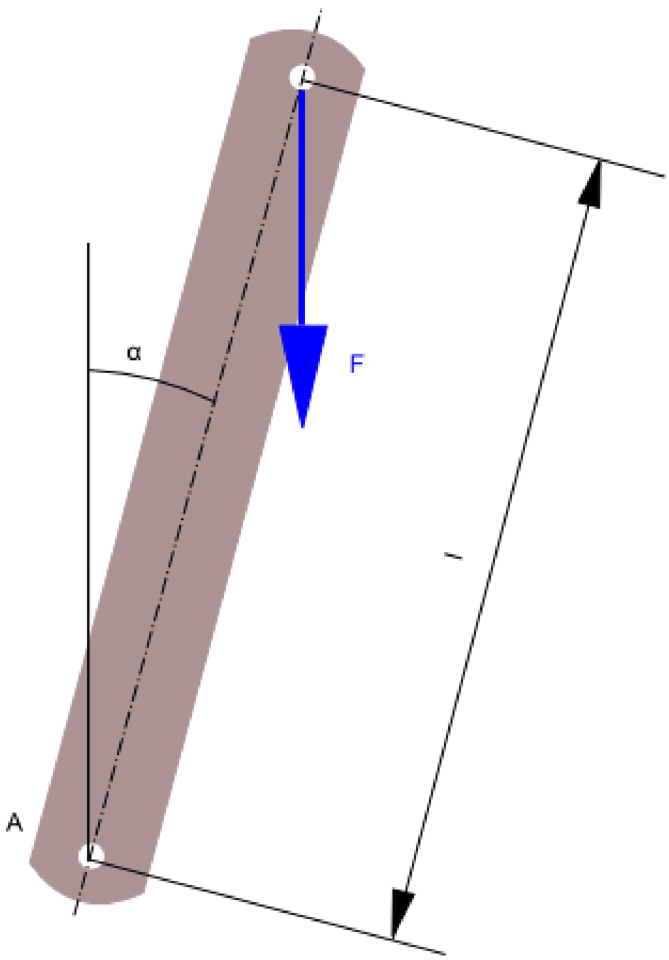
$$R_y = -1664\ \mathrm{N}$$

$$\mathrm{MA}_z = 108{,}8\ \mathrm{Nm}$$

exercice numéro 9

présentation

Le but de cet exercice est de calculer la résultante des efforts sur une pièce. La figure ci-dessous présente la structure à étudier.



structure à étudier

question n° 1

Remplacer la force agissant sur le levier par un système équivalent constitué d'une force et d'un couple au point A.

solution n° 1

On calcule les composantes de la force résultante suivant l'axe x (horizontal) et l'axe y (vertical) et le moment résultant au point A.

$$R_x = 0$$

$$R_y = -\mathrm{F}$$

$$\mathrm{MA}_z = -\mathrm{F}l\sin(\alpha)$$

résultat n° 1

Les composantes de la résultante en x et en y sont:

$$R_x = 0$$

$$R_y = -800 \ \mathrm{Nm}$$

Le moment en A est:

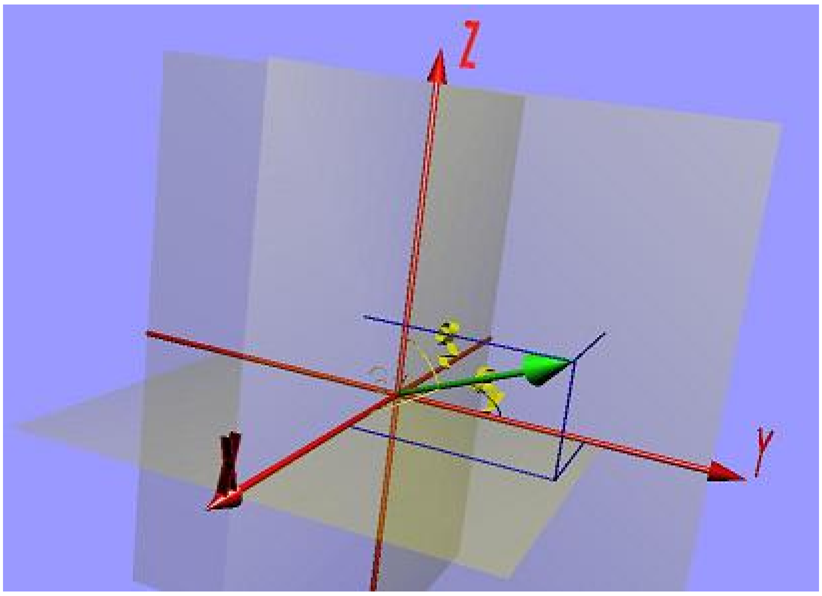
$$\mathrm{MA}_z = -26{,}92 \ \mathrm{Nm}$$

efforts en 3 dimensions

introduction

. force
. moment
. couple
. résultante

force



composantes de force en 3d

La force F peut être considérée comme la somme de 3 vecteurs suivant les axes du repère (x, y, z)

$$\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$$

$\vec{F}$
: Force considérée comme un vecteur

F_x
: composante suivant l'axe x de la force considérée comme un scalaire (nombre)

F_y
: composante suivant l'axe y de la force considérée comme un scalaire (nombre)

F_z
: composante suivant l'axe z de la force considérée comme un scalaire (nombre)

$\vec{i}$
: vecteur unitaire suivant l'axe x

$\vec{j}$
: vecteur unitaire suivant l'axe y

$\vec{k}$
: vecteur unitaire suivant l'axe z

Connaissant les composantes de la force, on peut calculer la force.

$$F = \sqrt{{F_x}^2 + {F_y}^2 + {F_z}^2}$$

Connaissant l'intensité de la force et les cosinus directeurs on peut calculer les composantes:

$$F_x = F\cos\theta_x$$

$$F_y = F\cos\theta_y$$

$$F_z = F\cos\theta_z$$

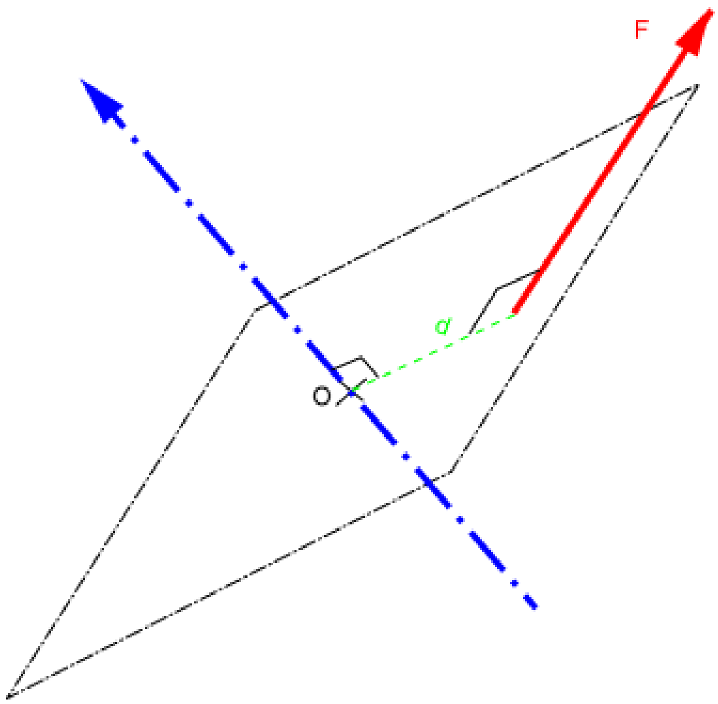
θ_x
: angle entre la force et l'axe x

θ_y
: angle entre la force et l'axe y

θ_z
: angle entre la force et l'axe z

moment

La notion de moment est définie en 3 dimensions par rapport à un axe passant par un point donné. Une force tend à générer un mouvement de rotation autour d'un axe de rotation perpendiculaire au plan formé par la force et le vecteur reliant le point d'application de la force au point considéré.



moment

L'expression du moment est la suivante:

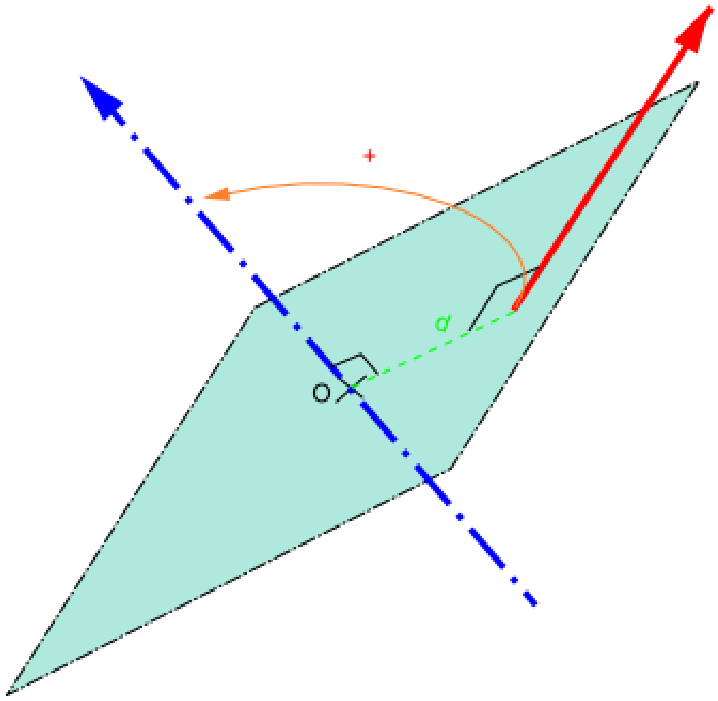
$$M = Fd$$

M
: moment de la force F par rapport au point O.

F
: force F

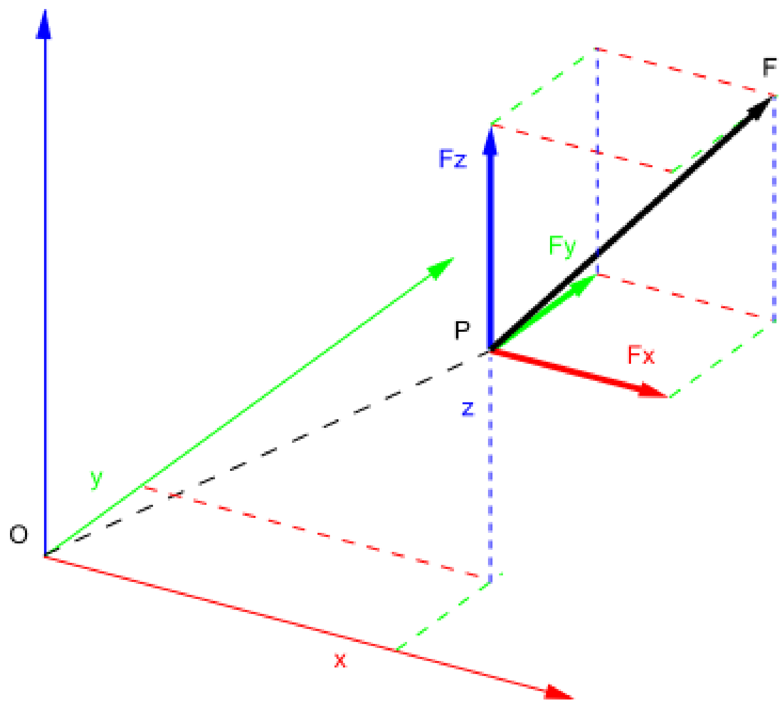
d
: distance de la force F au point O.

La définition du moment nécessite la définition d'un sens positif de rotation. On utilise en général la règle du tire-bouchon. On oriente l'axe de rotation et on définit un moment positif lorsque il engendre une rotation provocant une translation dans le sens positif défini sur l'axe.



sens positif conventionnel

Le moment d'une force par rapport à un point peut être calculé à partir des moments des composantes de la force par rapport aux axes du repère considéré.



moments des composantes d'une force

On obtient:

$$M_x = -F_y z + F_z y$$

M_x
moment de la force autour de l'axe x

(F_y, F_z)
: composante de la force suivant y, composante de la force suivant z

(y, z)
: coordonnée du point d'appication de la force suivant y, coordonnée du point d'appication de la force suivant z

$$M_y = F_x z - F_z x$$

M_y
: moment de la force autour de l'axe y

(F_x, F_z)
: composante de la force suivant x, composante de la force suivant z

(x, z)
: coordonnée du point d'appication de la force suivant x, coordonnée du point d'appication de la force suivant z

$$M_z = -\mathrm{F}_x y + F_y x$$

M_z
: moment de la force autour de l'axe z

(F_x, F_y)
: composante de la force suivant x, composante de la force suivant y

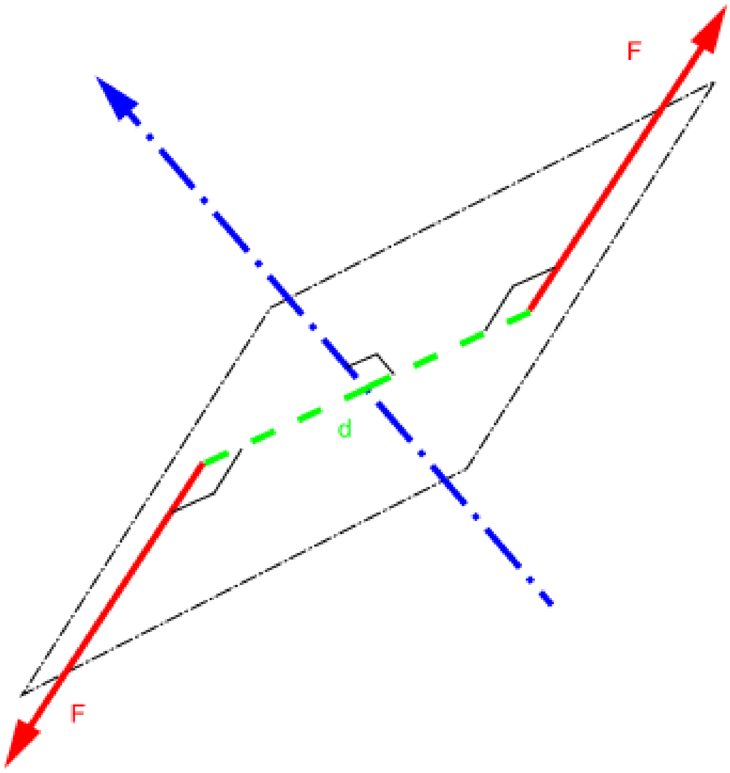
(x, y)
: coordonnée du point d'appication de la force suivant x, coordonnée du point d'appication de la force suivant y

Les relations ci-dessus peuvent également être obtenues en utilisant la notion de produit vectoriel. On a alors:

$$\vec{M} = \vec{\mathrm{OP}} \wedge \vec{F}$$

couple

De même qu'en 2 dimensions un couple peut être défini lorsque l'on a 2 forces égales et opposées.



couple

résultante

De même qu'en 2 dimensions on peut ramener un système de forces quelconque sur une structure à une résultante en un point donné. On calcule le plus souvent la somme vectorielle des forces ainsi que la somme vectorielle des moments par rapport au point considéré.

exercices de statique 3d

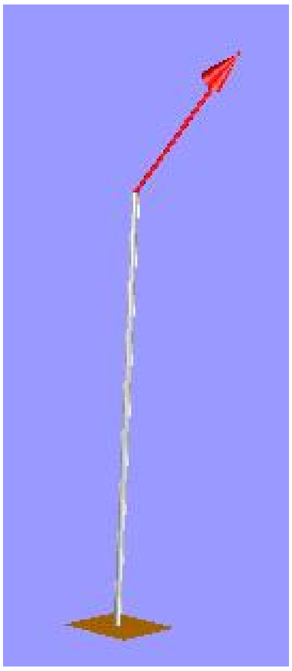
présentation

On présente ici des exercices qui permettent de se familiariser avec les notions de forces, en 3 dimensions qui sont souvent utilisées en résistance des matériaux.

exercice numéro 1

présentation

Le but de cet exercice est de calculer l'angle d'une force par rapport à un axe et par rapport à un plan. La figure ci-dessous présente la structure à étudier.



structure à étudier

Un effort P dont les composantes sont indiquées ci-dessous en Newton est exercé sur le poteau.

$$P = -200\vec{i} + 60\vec{j} + 80\vec{k}$$

question n° 1

Déterminer l'angle que P fait avec l'axe x et avec le plan x-z.

solution n° 1

La projection de la force sur le plan vaut:

$$P_{xz} = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$$

Le module de la force vaut:

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$$

L'angle de la force avec l'axe x vaut:

$$\cos \quad \theta_x = \frac{P_x}{P}$$

L'angle de la force avec la projection de la force dans le plan xz vaut:

$$\cos \quad \alpha = \frac{P_{xz}}{P}$$

résultat n° 1

En remplaçant dans les équations ci-dessus on obtient:

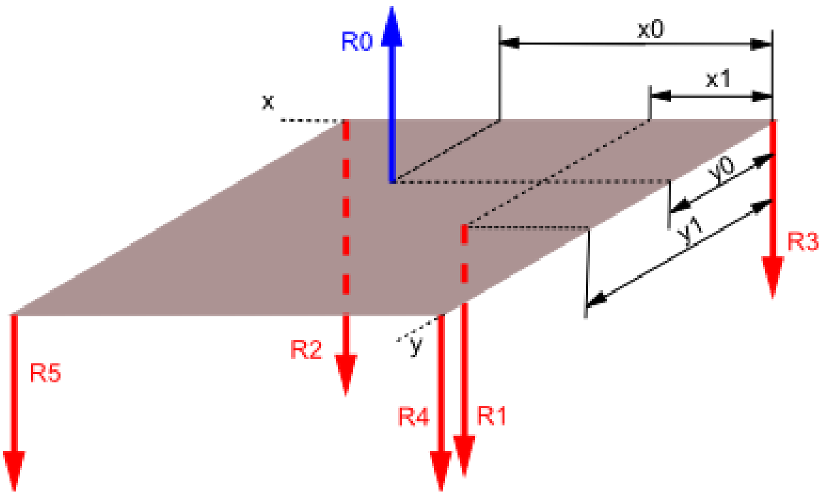
$$\theta_x = 153{,}4 \ °$$

$$\alpha = 15{,}6 \ °$$

exercice numéro 2

présentation

Le but de cet exercice est de calculer la résultante des efforts sur une plaque telle que ci-dessous dont la largeur et la hauteur sont de 8 m:



structure à étudier

Les valeurs des efforts sont les suivants:

$$R_0 = 32000 \text{ N}$$

$$R_1 = 16000 \text{ N}$$

$$R_2 = 24000 \text{ N}$$

$$R_3 = 28000 \text{ N}$$

$$R_4 = 20000 \text{ N}$$

$$R_5 = 22000 \text{ N}$$

Les valeurs des distances sont les suivantes:

$$x_0 = 6 \text{ m}$$

$$x_1 = 2 \text{ m}$$

$$y_0 = 2 \text{ m}$$

$$y_1 = 4 \text{ m}$$

question n° 1

Calculer la résultante des forces.

question n° 2

Calculer le point d'application de la résultante des forces.

solution n° 1

On peut calculer la valeur de la résultante de la façon suivante:

$$R = R_0 - (R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + R_5)$$

solution n° 2

On suppose que la résultante est négative. Connaissant sa direction on peut calculer les coordonnées x et y du point d'application de la résultante grâce aux équations suivantes:

$$-R_0 x_0 + R_2 x_2 + R_5 x_5 + R_1 x_1 - |R| x = 0$$

$|R|$
: valeur absolue de la résultante

x
: coordonnée en x du point d'application de la résultante

x_0
: coordonnée en x du point d'application de la force R0

x_1
: coordonnée en x du point d'application de la force R1

x_2
: coordonnée en x du point d'application de la force R2

x_5
: coordonnée en x du point d'application de la force R5

De même pour y on a:

$$-R_4 y_4 - R_5 y_5 - R_1 y_1 + R_0 y_0 + |R| y = 0$$

$|R|$
: valeur absolue de la résultante

y
: coordonnée en y du point d'application de la résultante

y_0
: coordonnée en y du point d'application de la force R0

y_1
: coordonnée en y du point d'application de la force R1

y_4
: coordonnée en y du point d'application de la force R4

y_5
: coordonnée en y du point d'application de la force R5

résultat n° 1

On obtient:

$$R = -78000 \text{ N}$$

résultat n° 2

On obtient:

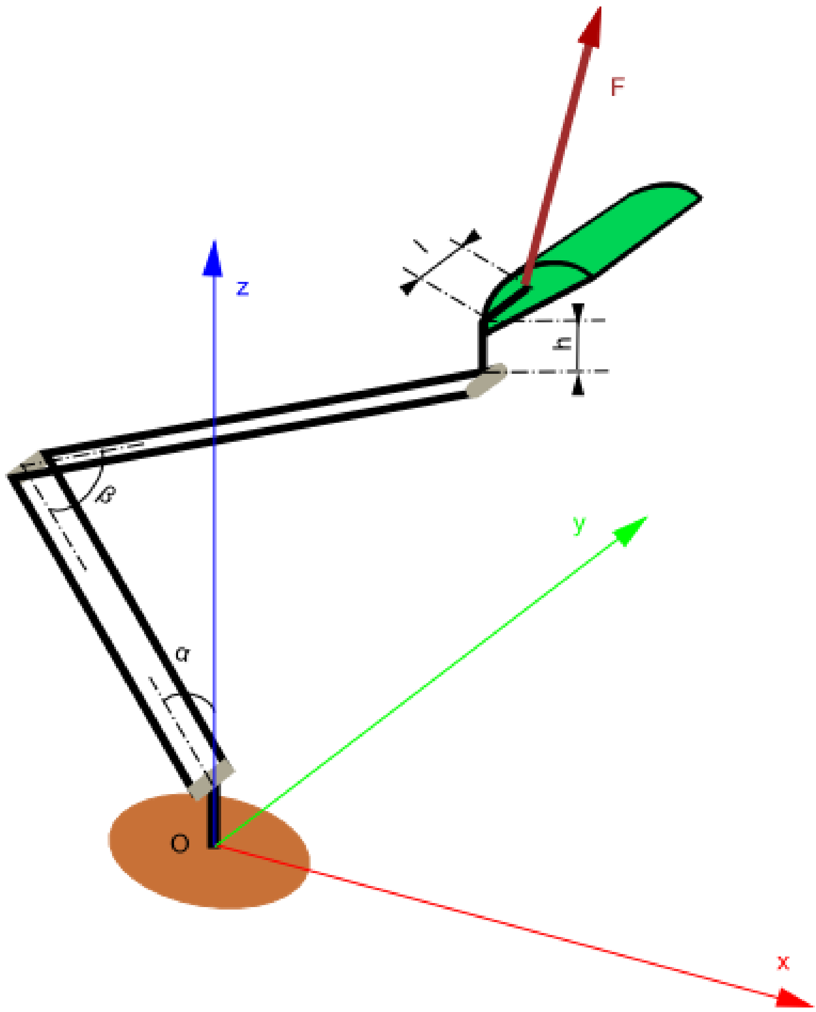
$$x = 2{,}67\ \text{m}$$

$$y = 4{,}31\ \text{m}$$

exercice numéro 3

présentation

Le but de cet exercice est de calculer les efforts (forces et moments) au point O dues à la force F.



structure à étudier

Les composantes de la force F suivant le repère x,y,z sont :

$$F_x = 2 \text{ N}$$

$$F_y = 2 \text{ N}$$

$$F_z = 20 \text{ N}$$

La longueur des tiges du support est de 400 mm. La longueur l est de 50 mm et la hauteur h de 40 mm. Les angles sont les suivants:

$$\alpha = 20 \text{ °}$$

$$\beta = 80 \text{ °}$$

question n° 1

Calculer les efforts (forces et moments) au point O dues à la force F.

solution n° 1

Les forces au point O sont:

$$R_x = F_x$$

$$R_y = F_y$$

$$R_z = F_z$$

Les moments au point O sont:

$$M_x = -F_y z + F_z y$$

$$M_y = -F_z x + F_x z$$

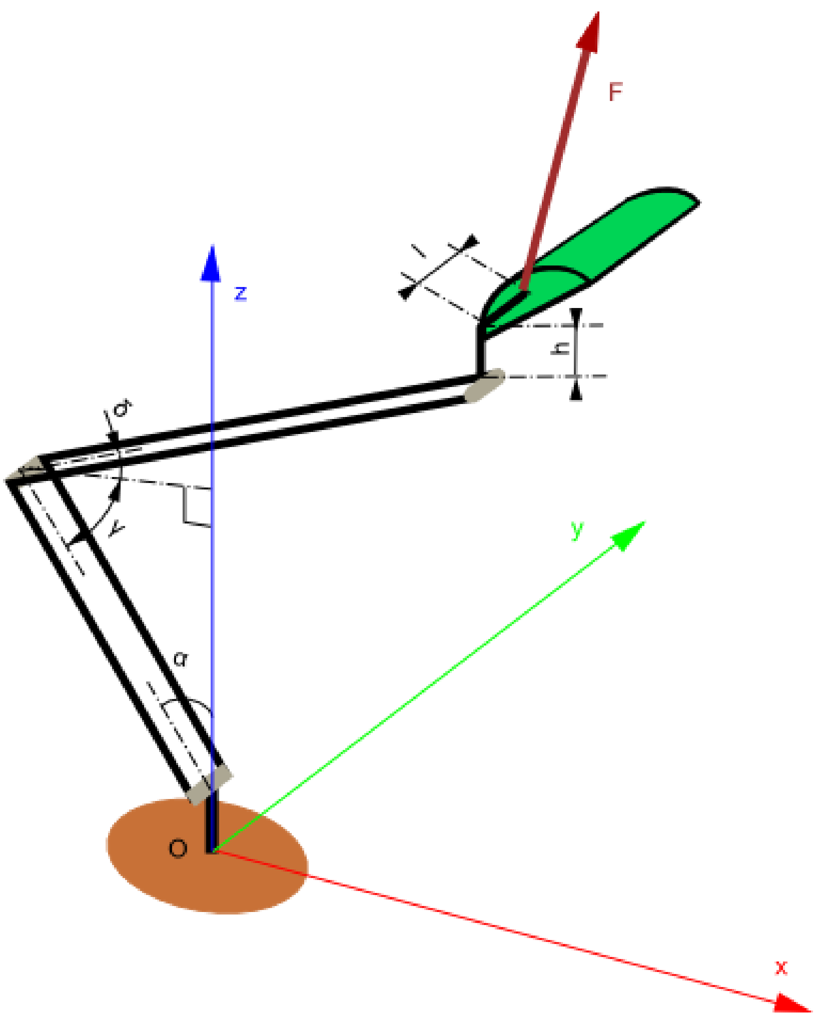
$$M_z = -F_x y + F_y x$$

x
: coordonnée en x du point M d'application de la force F dans le repère x,y,z

y
: coordonnée en y du point M d'application de la force F dans le repère x,y,z

z
: coordonnée en z du point M d'application de la force F dans le repère x,y,z

On définit des angles pour faciliter le calcul des coordonnées du point d'application de la force.



schéma

on calcule les coordonnées du point M d'application de la force dans le repère O,x,y,z:

$$x = -\mathrm{Lsin}(\alpha) + L\cos(\delta)$$

L
: longueur des tiges support

α
: angle entre verticale et tige support inférieure

δ
: angle entre tige support supérieure et horizontale

$$y = l$$

l
: longueur de l'axe supérieur

$$z = L\cos(\alpha) + L\sin(\delta) + h$$

h
: hauteur de l'axe supérieur

on calcule l'angle de la façon suivante:

$$\delta = \beta - \gamma$$

β
: angle entre tige support inférieure et supérieure

γ
: angle entre tige support inférieure et horizontale

de plus:

$$\gamma = \pi - \frac{\pi}{2} - \alpha$$

résultat n° 1

on obtient:

$$M_x = 0{,}03 \ \mathrm{Nm}$$

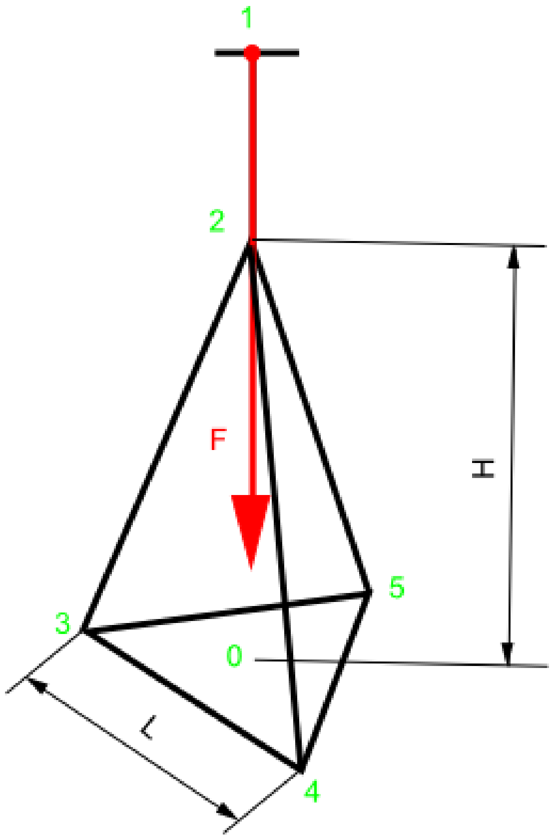
$$M_y = -4{,}17 \ \mathrm{Nm}$$

$$M_z = 0{,}42 \ \mathrm{Nm}$$

exercice numéro 4: calcul de treillis en 3d

présentation

Le but de cet exercice est de calculer les efforts dans les barres d'un treillis en 3d. La figure ci-dessous présente le système à étudier.



structure à étudier

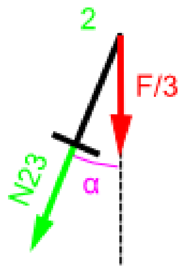
La force F est de 4000 N, la hauteur H de 400 mm, les longueurs entre les points 3,4 et 5 sont identiques et égales à L qui vaut 250 mm.

question n° 1

calculer les sollicitations dans les barres horizontales entre les points 3-4, 4-5 et 3-5.

solution n° 1

On isole le noeud 2:



noeud 2

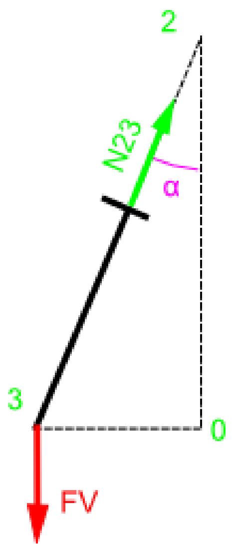
L'équation d'équilibre sur l'axe vertical donne:

$$-N_{23}\cos(\alpha) - \frac{F}{3} = 0$$

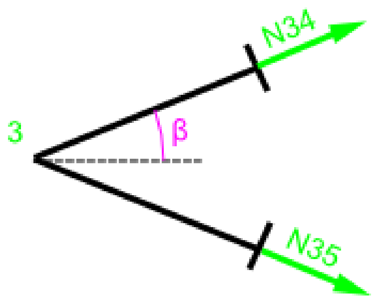
donc:

$$N_{23} = -\frac{1}{3}\frac{F}{\cos(\alpha)}$$

on isole le noeud 3:



coupe dans le plan vertical



coupe dans le plan horizontal

Les coupes ci-dessus permettent d'écrire l'équilibre du noeud 3 suivant l'axe horizontal:

$$N_{23}\sin(\alpha) + 2N_{34}\cos(\beta) = 0$$

donc:

$$N_{34} = \frac{1}{6}\frac{F\sin(\alpha)}{\cos(\beta)\cos(\alpha)}$$

L'angle entre les poutres partant du point 2 et la verticale est donné par:

$$\tan(\alpha) = \frac{d_{03}}{H}$$

d_{03} distance entre les points 0 et 3

le triangle 3,4,5 est isocèle donc:

$$\beta = 30°$$

résultat n° 1

$$N_{34} = 278 \text{ N}$$

$$N_{35} = 278 \text{ N}$$

$$N_{45} = 278 \text{ N}$$

équilibre statique

introduction

Lorsqu'on souhaite calculer une structure par la résistance des matériaux on est amené à isoler la structure ou la portion de la structure que l'on souhaite étudier de son environnement. Ensuite on introduit des efforts de liaison sur les zones de la structure isolée qui étaient en contact avec l'environnement. Ces efforts introduits (forces ou moments) sont souvent appelés les réactions et sont des inconnus qui seront déterminées en écrivant que la structure isolée doit être en équilibre statique. Les étapes sont les suivantes:

Procédure :

- isoler la structure à étudier
- introduire les efforts de liaisons inconnus et les charges
- calculer les efforts de liaisons par les conditions d'équilibre

Les conditions d'équilibre peuvent être écrites en utilisant le principe fondamental de la statique.

- la somme des efforts appliqués à la pièce est nulle
- la somme des moments par rapport à un point quelconque est nulle

En 2 dimensions on écrit:

- Somme des efforts projetés sur l'axe x égale 0
- Somme des efforts projetés sur l'axe y égale 0
- Somme des moments par rapport à un point égale 0

cas de 3 dimensions

Les conditions d'équilibre sont les suivantes :

- la somme des efforts appliqués à la pièce est nulle
- la somme des moments par rapport à un point quelconque est nulle

En 3 dimensions ces conditions peuvent s'écrire de la façon suivante:

- Somme des efforts projetés sur l'axe x égale 0
- Somme des efforts projetés sur l'axe y égale 0
- Somme des efforts projetés sur l'axe z égale 0
- Somme des moments d'axe x par rapport à un point égale 0
- Somme des moments d'axe y par rapport à un point égale 0
- Somme des moments d'axe z par rapport à un point égale 0

équilibre statique 2d

introduction

On écrit les conditions d'équilibre sur une structure isolée de son environnement.

Procédure :

- identifier précisément la pièce à isoler
- tracer ses frontières externes
- tracer tous les efforts s'appliquant à la pièce
- identifier le repère dans lequel on va travailler
- écrire les conditions d'équilibre
- calculer les efforts inconnus

Les conditions d'équilibre sont les suivantes :

- la somme des efforts appliqués à la pièce est nulle
- la somme des moments par rapport à un point quelconque est nulle

En 2 dimensions on écrit:

- Somme des efforts projetés sur l'axe x égale 0
- Somme des efforts projetés sur l'axe y égale 0
- Somme des moments par rapport à un point égale 0

réactions

On doit identifier tous les degrés de liberté cinématiques bloqués aux liaisons de la structure étudiée avec l'extérieur. En 2 dimensions on a 3 degrés de liberté cinématiques à chaque point. On fera apparaître une réactions à chaque fois que l'extérieur bloque un degré de liberté sur la structure. Une force lorsqu'il s'agira du blocage d'une translation, un moment lorsqu'il s'agira du blocage d'une rotation.

exercices de statique 2d

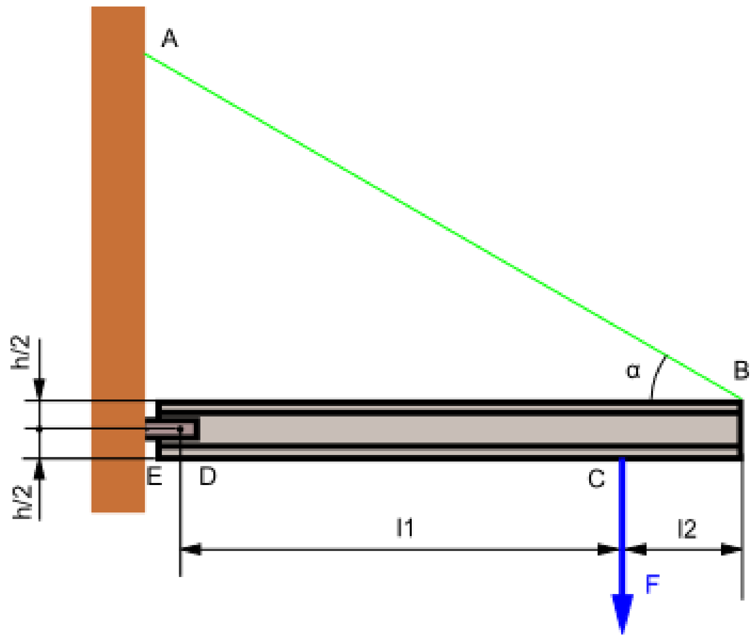
présentation

On présente ici des exercices qui permettent de se familiariser avec les notions de forces, couples, moments, résultante et équilibre statique des structures qui sont très utilisées en résistance des matériaux.

exercice numéro 1

présentation

Le but de cet exercice est de calculer l'effort dans le câble.



structure à étudier

Les données numériques sont les suivantes:

$$F = 3000 \text{ N}$$

$$h = 200 \text{ mm}$$

$$\text{l1} = 1{,}5 \text{ m}$$

$$\text{l2} = 300 \text{ mm}$$

$$\alpha = 30°$$

question n° 1

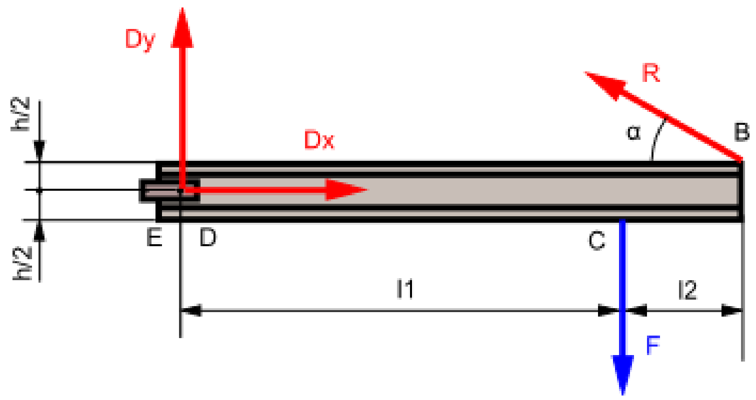
Calculer la tension dans le câble.

question n° 2

Calculer les composantes de la réaction au point D.

solution n° 1

Le modèle de calcul est le suivant:



modèle de calcul

On écrit que la somme des moments par rapport à D est nulle, soit:

$$-\mathrm{F}l1 + R\sin(\alpha)(l1 + l2) + R\cos(\alpha)\frac{h}{2} = 0$$

On calcule la force dans le câble en résolvant l'équation des moments

solution n° 2

On écrit que la somme des forces suivant x est nulle, soit:

$$D_x - R\cos(\alpha) = 0$$

On écrit que la somme des forces suivant y est nulle, soit:

$$D_y + R\sin(\alpha) - F = 0$$

On calcule les composantes de la réaction

résultat n° 1

La force dans le câble est:

$$R = 4561 \;\mathrm{N}$$

résultat n° 2

Les composantes de la réaction en D sont:

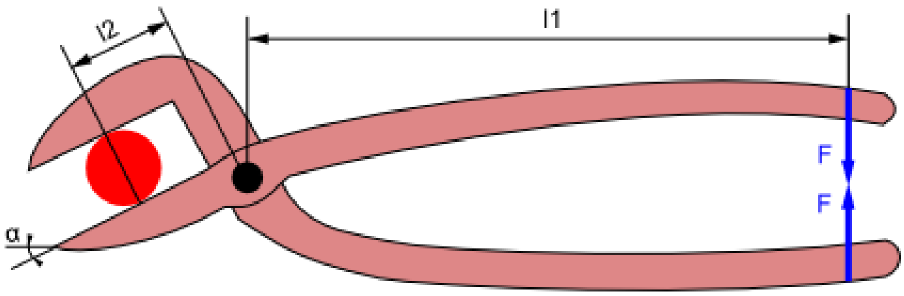
$$D_x = 3950 \;\mathrm{N}$$

$$D_y = 720 \;\mathrm{N}$$

exercice numéro 2

présentation

Le but de cet exercice est de calculer les efforts sur l'axe d'une clé telle que ci-dessous:



structure à étudier

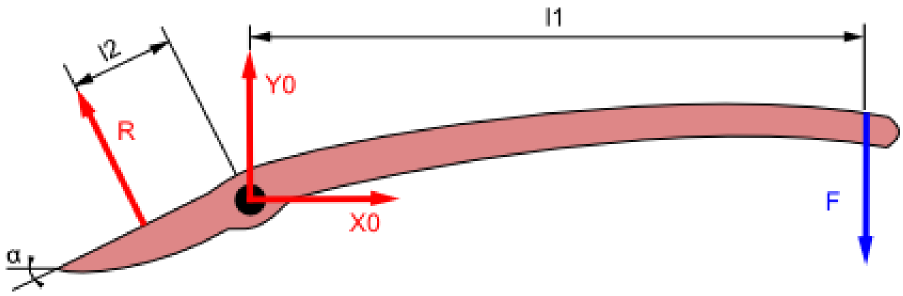
La force F est de 50 N, la distance l_1 de 70 mm, l_2 30 mm. L'angle α de 40°.

question n° 1

calculer les efforts sur l'axe liant les 2 parties de la clé.

solution n° 1

On isole une partie de la clé de façon à faire apparaître les forces sur l'axe.



efforts sur la partie isolée

Les équations d'équilibre permettent d'écrire les relations suivantes:

$$X_0 - R\sin(\alpha) = 0$$

$$Y_0 + R\cos(\alpha) - F = 0$$

$$-Rl_2 + Fl_1 = 0$$

$$X_0 = 75 \text{ N}$$

$$Y_0 = -39 \text{ N}$$

$$R = 117 \text{ N}$$

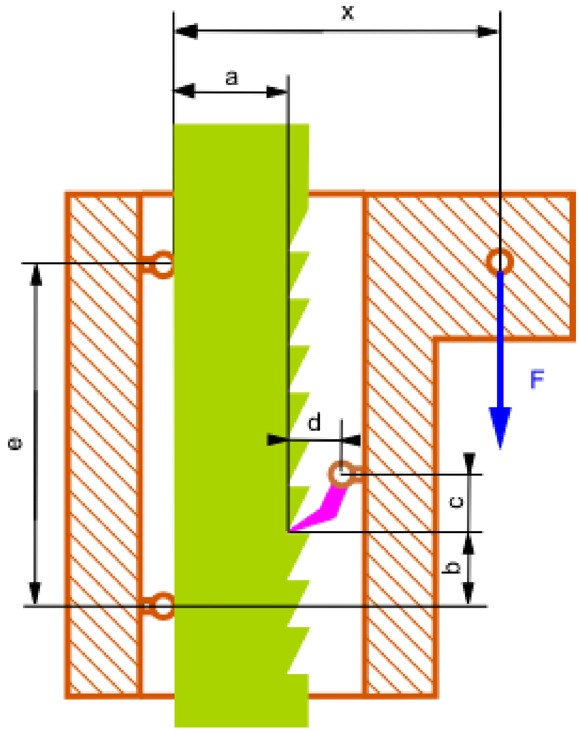
résultat n° 1

$$\sqrt{X_0^2 + Y_0^2} = 85 \text{ N}$$

exercice numéro 3

présentation

Calculer la distance d permettant d'avoir des forces identiques sur les deux appuis quelque soit la valeur de la force appliquée F:



structure à étudier

Les valeurs des efforts sont les suivants:

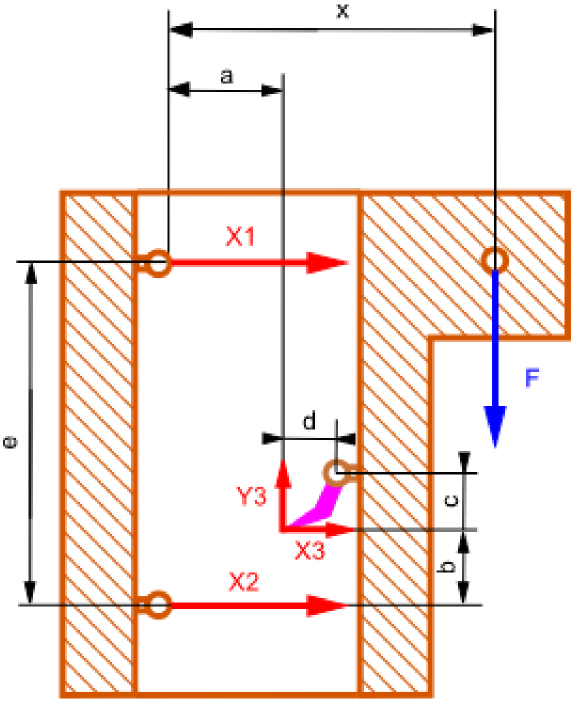
$$x_1 = 2 \text{ m}$$

question n° 1

Calculer la distance d.

solution n° 1

On isole le système correspondant au coulisseau avec le crochet en enlevant la crémaillère.



système 1

On peut écrire les 3 équations d'équilibre de ce système.

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

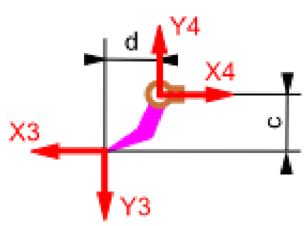
$$Y_3 - F = 0$$

$$-X_1 e - X_3 b - F x + Y_3 a = 0$$

On peut également rajouter l'équation correspondant à la condition sur l'égalité des forces sur les galets:

$$X_1 - X_2 = 0$$

Le nombre d'inconnues (X1,X2,X3,Y3,x) est trop important pour permettre une résolution. On peut rajouter des équations en isolant le crochet.



système 2

On peut à nouveau écrire 3 équations d'équilibre pour ce nouveau système.

$$X_4 - X_3 = 0$$

$$Y_4 - Y_3 = 0$$

$$Y_3 d - X_3 c = 0$$

Cette dernière équation permet de compléter le système d'équation précedemment obtenu. On a alors à résoudre:

$$Y_3 d - X_3 c = 0$$

$$X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

$$Y_3 - F = 0$$

$$-X_1 e - X_3 b - Fx + Y_3 a = 0$$

$$Y_3 d - X_3 c = 0$$

La solution de ce système est la suivante:

$$Y_3 = F$$

$$X_2 = -\frac{1}{2}\frac{d}{c}F$$

$$X_3 = \frac{d}{c}F$$

$$X_1 = -\frac{1}{2}\frac{d}{c}F$$

$$x = \frac{1}{2}\frac{2ac + de - 2bd}{c}$$

résultat n° 1

On obtient:

$$x = 277{,}5 \text{ mm}$$

équilibre statique 3d

introduction

Les conditions d'équilibre sont les suivantes :

. la somme des efforts appliqués à la pièce est nulle
. la somme des moments par rapport à un point quelconque est nulle

En 3 dimensions on écrit:

. Somme des efforts projetés sur l'axe x égale 0
. Somme des efforts projetés sur l'axe y égale 0
. Somme des efforts projetés sur l'axe z égale 0
. Somme des moments d'axe x par rapport à un point égale 0
. Somme des moments d'axe y par rapport à un point égale 0
. Somme des moments d'axe z par rapport à un point égale 0

réactions

On doit identifier tous les degrés de liberté cinématiques bloqués aux liaisons de la structure étudiée avec l'extérieur. En 3 dimensions on a 6 degrés de liberté cinématiques à chaque point. On fera apparaître une réactions à chaque fois que l'extérieur bloque un degré de liberté sur la structure. Une force lorsqu'il s'agira du blocage d'une translation, un moment lorsqu'il s'agira du blocage d'une rotation.

exercices de statique équilibre

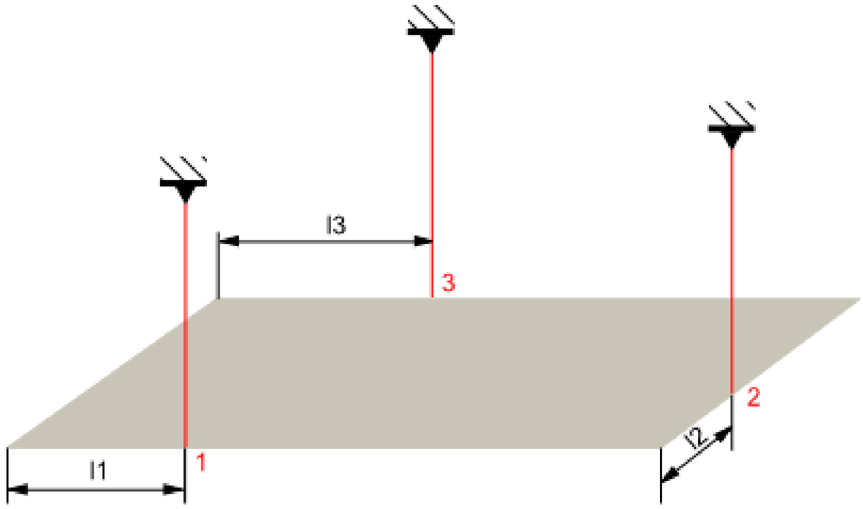
présentation

On présente ici des exercices qui permettent de se familiariser avec les notions de forces, couples, moments, résultante et équilibre statique des structures qui sont très utilisées en résistance des matériaux.

exercice numéro 1

présentation

Le but de cet exercice est de calculer les efforts dans les câbles de support de la tôle. La tôle en acier a une épaisseur e de 12 mm . La longueur L est de 2400 mm, la largeur de 1200 mm. La masse volumique de l'acier ϱ 7860 kg/m3. On prend 10 m/s2 pour l'accélération de la pesanteur. La longueur l1 est de 300 mm, l2 est de 400 mm, l3 est de 800 mm.



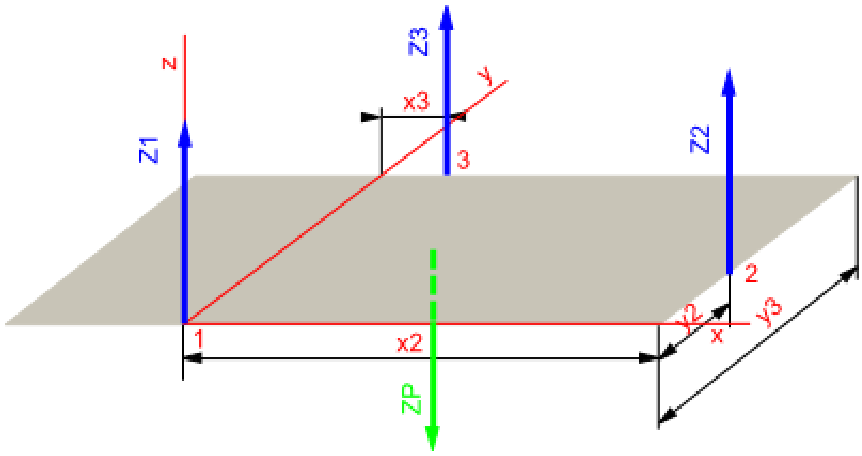
structure à étudier

question n° 1

Calculer l'effort sur chaque câble.

solution n° 1

On isole la plaque et on choisit un repère:



modèle

Les équations d'équilibre sont les suivantes:

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 - Z_P = 0$$

$$Z_3 y_3 + Z_2 y_2 - Z_P y_p = 0$$

$$-Z_3 x_3 - Z_2 x_2 + Z_P x_P = 0$$

La résolution du système donne:

$$Z_1 = Z_P \frac{\left(-y_3 x_P + y_p x_3 + y_2 x_P - x_2 y_p - y_2 x_3 + x_2 y_3\right)}{-y_2 x_3 + x_2 y_3}$$

$$Z_2 = Z_P \frac{\left(y_3 x_P - y_p x_3\right)}{-y_2 x_3 + x_2 y_3}$$

$$Z_3 = -Z_P \frac{\left(y_2 x_P - y_p x_2\right)}{-y_2 x_3 + x_2 y_3}$$

résultat n° 1

En remplaçant les valeurs littérales par les valeurs numériques on obtient:

$$Z_1 = 1243 \text{ N}$$

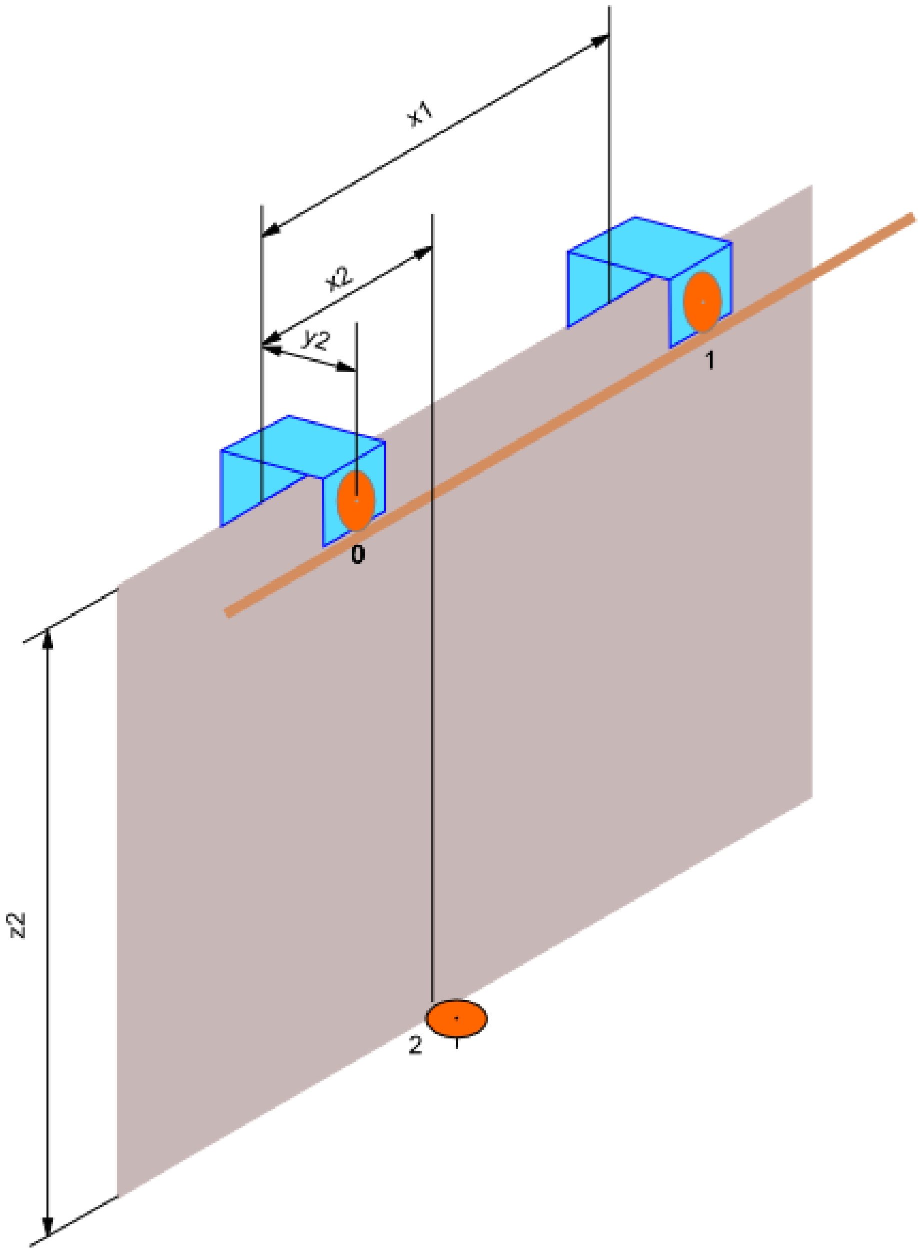
$$Z_2 = 173{,}4 \text{ N}$$

$$Z_3 = 1300 \text{ N}$$

exercice numéro 2

présentation

Le but de cet exercice est de calculer des efforts à partir de l'équilibre d'une structure en 3d. Le portail a une longueur L de 6 m, une hauteur H de 2,8 m, une épaisseur e de 6 mm en acier de masse volumique ϱ 7860 kg/m3. On considère une accélération de la pesanteur de 10 m/s2. Le galet au point 2 agit comme un guide. La dimension x1 vaut 2m, x1 0,8m et y2 0,1 m.



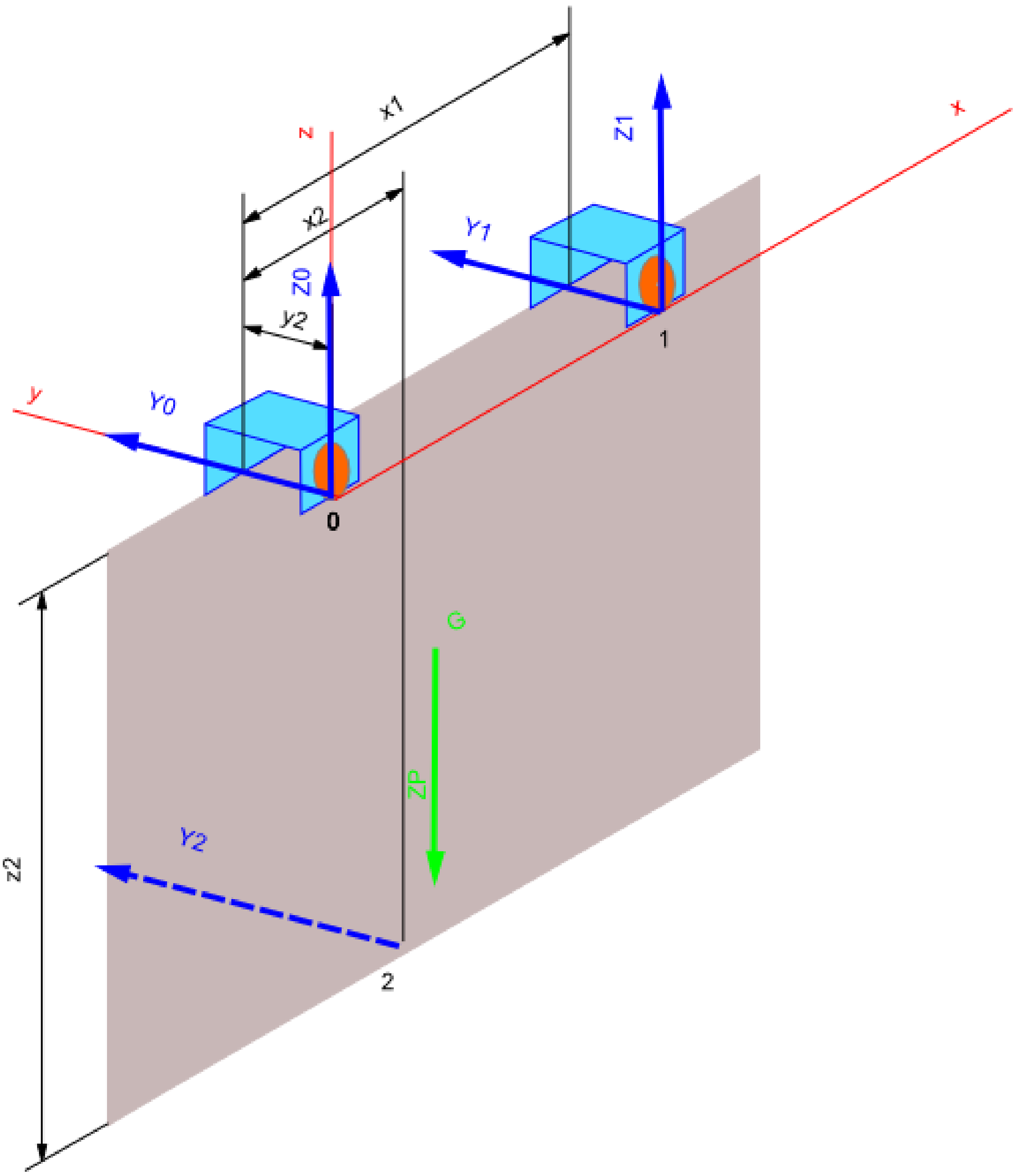
structure à étudier

question n° 1

Calculer les efforts aux points 0 et 1 (contacts rail-roues) et au point 2 (contact galet-vantail).

solution n° 1

On isole le système constitué du vantail avec les supports et les roues. On représente les efforts présents aux points de contacts avec les pièces éliminées (rail et galet guideur). On choisit un repère x,y,z avec pour origine le point 0, tel que sur la figure:



repère et efforts

On peut écrire les équations d'équilibre sur le système isolé. L'équation des forces suivants x est inutiles, il reste donc 5 équations.

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 = 0$$

$$Z_0 + Z_1 - Z_P = 0$$

$$-Z_P y_p + Y_2 z_2 = 0$$

$$-Z_1 x_1 + Z_P x_P = 0$$

$$Y_1 x_1 + Y_2 x_2 = 0$$

La résolution du système d'équations donne:

$$Y_0 = -\frac{y_P(-x_2 + x_1)}{z_2 x_1} Z_P$$

$$Y_1 = -\frac{y_P x_2}{z_2 x_1} Z_P$$

$$Y_2 = \frac{y_P}{z_2} Z_P$$

$$Z_0 = \frac{(-x_\mathrm{P} + x_1)}{x_1} Z_P$$

$$Y_0 = \frac{x_P}{x_1} Z_P$$

résultat n° 1

En remplaçant les valeurs littérales par les valeurs numériques on obtient:

$$Y_0 = -113{,}2 \text{ N}$$

$$Y_1 = -75{,}5 \text{ N}$$

$$Y_2 = 188{,}6 \text{ N}$$

$$Z_0 = 2641 \text{ N}$$

$$Z_1 = 2641 \text{ N}$$

sollicitations simples

introduction

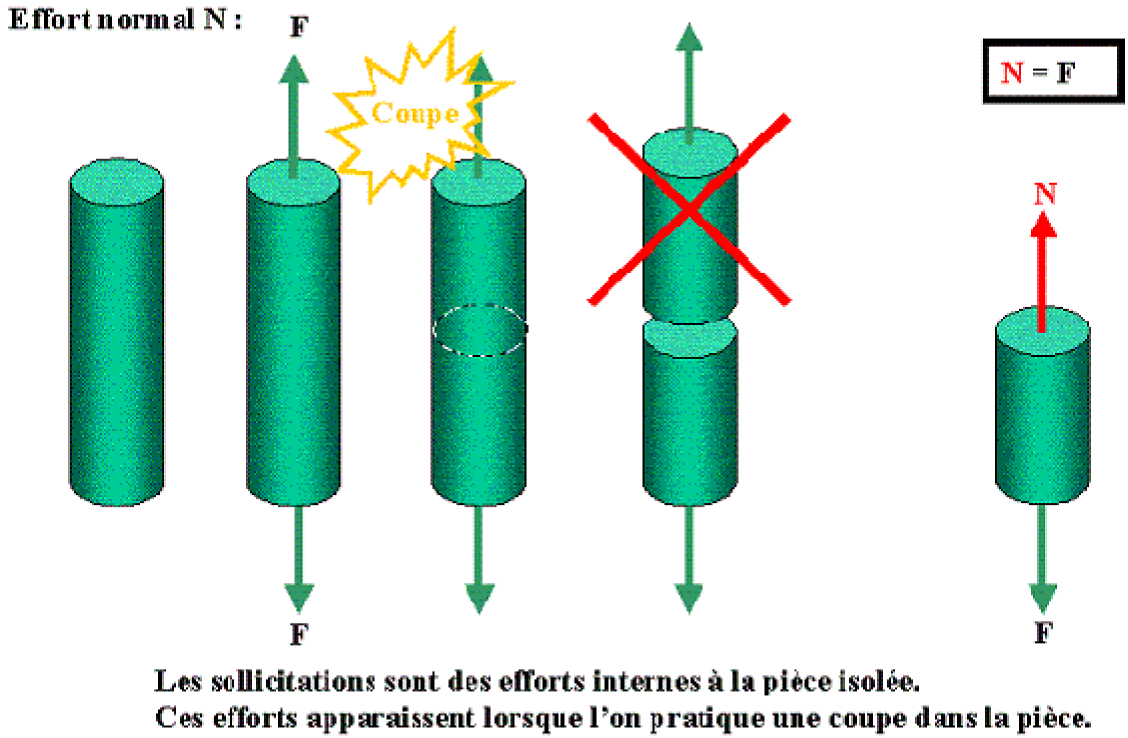
les principales sollicitations

. traction N
. cisaillement T
. flexion pure M ou flexion simple T, M
. torsion simple M_t

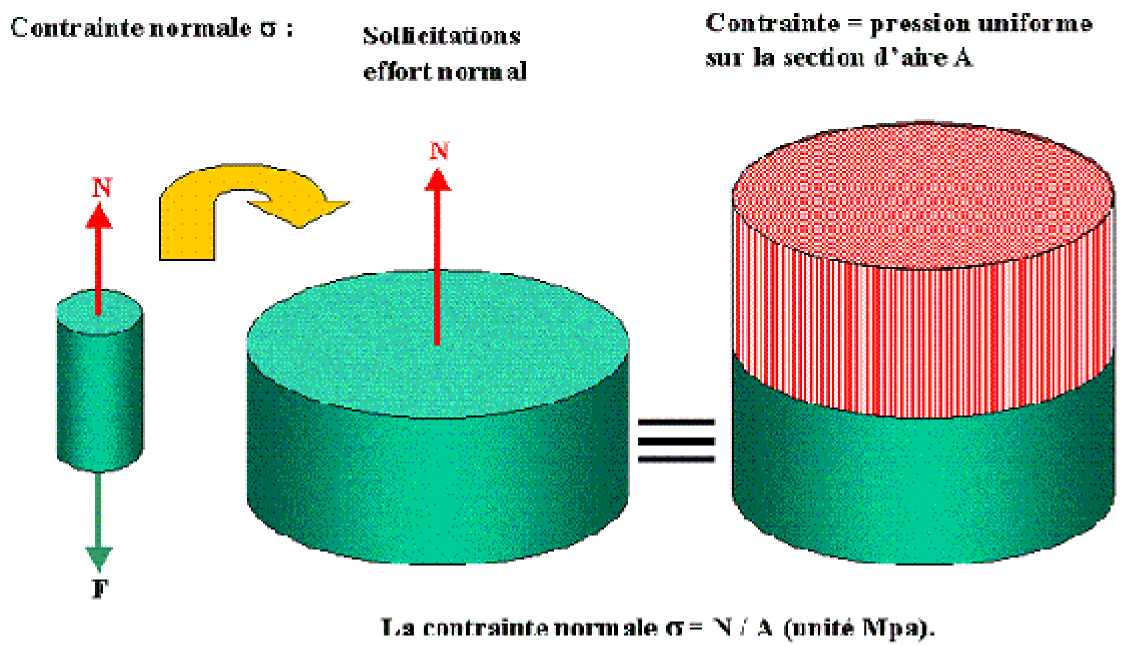
Plusieurs sollicitations simples simultanées conduisent à des sollicitations composées

traction-compression

introduction



traction 1



traction 2

La procédure de dimensionnement en traction est la suivante:

- isoler la pièce
- calculer la sollicitation de traction N
- calculer l'aire de la section qui travaille A

- calculer la contrainte σ par la formule : $\sigma = \frac{N}{A}$
- vérifier que la contrainte ne dépasse pas la limite admissible du matériau utilisé.

Remarque: Si les pièces travaillent en compression il faudra également vérifier qu'elles ne flambent pas.

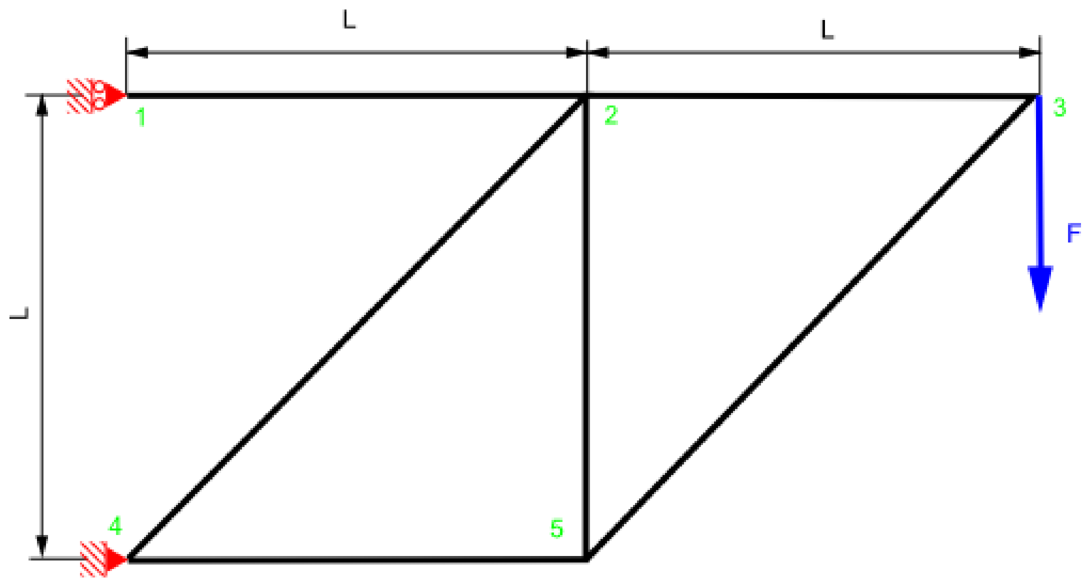
calcul de treillis

introduction

Les treillis correspondent à des structures de barres qui sont très utilisées en construction car elles ont la propriété d'être capable de supporter des efforts importants pour des masses relativement faibles. Cette capacité est due au fait que les barres d'un treillis ne travaillent que en traction ou compression si les efforts sont uniquement situés sur des noeuds de la structure et les jonctions sont articulés. Les treillis représentent donc un cas courant d'application de calcul d'efforts normaux N dans les barres. Pour faire les calculs de ces efforts sur des treillis hyperstatique on doit isoler les noeuds et écrire les équations d'équilibre qui sont au nombre de 2 puisque la somme des moments est automatiquement nulles du fait de la concourance des efforts aux noeuds.

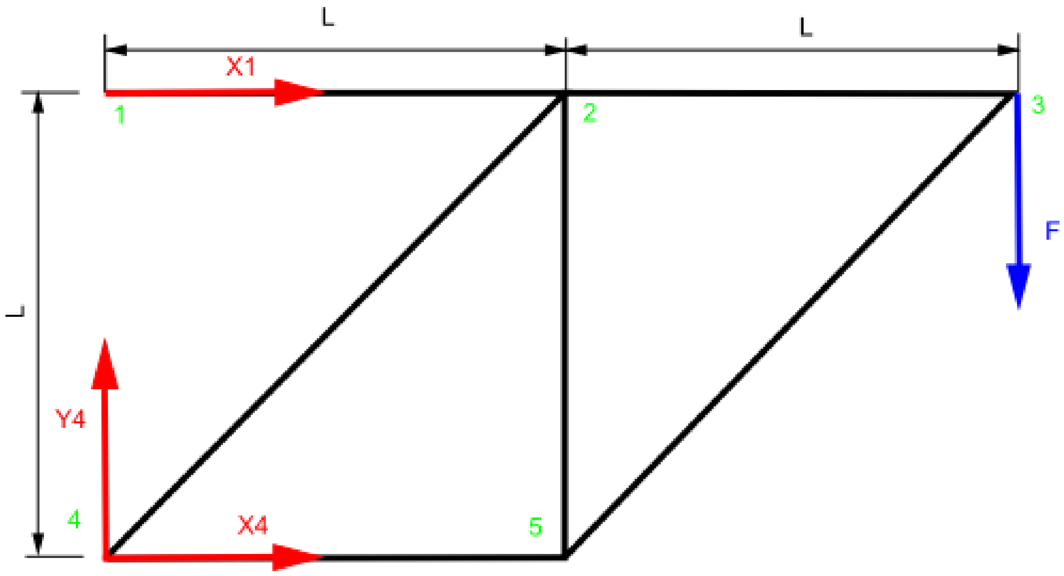
exemple

On suppose que l'on souhaite calculer les efforts dans le treillis ci-dessous:



treillis à étudier

On calcule tout d'abord les réactions grâce au modèle ci-dessous:



modèle global

Les équations d'équilibre sont les suivantes:

$$X_1 + X_4 = 0$$

$$Y_1 + Y_4 - F = 0$$

$$-X_1 L - 2FL = 0$$

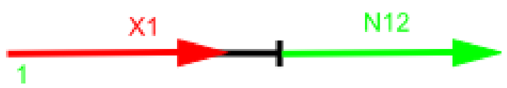
On peut calculer les réactions avec les équations d'équilibre et on obtient:

$$X_1 = -2F$$

$$X_4 = 2F$$

$$Y_4 = F$$

On isole ensuite le noeud 1 pour calculer les sollicitations.



noeud 1

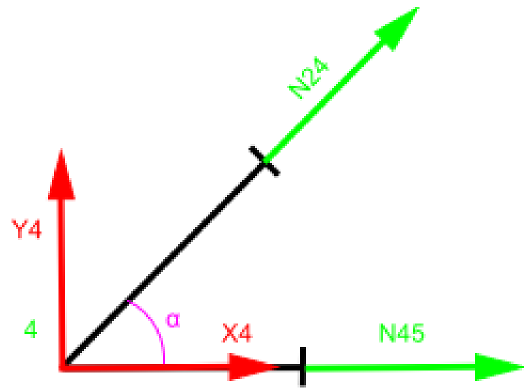
Il suffit d'écrire 1 équation d'équilibre pour le noeud 1, soit:

$$X_1 + N_{12} = 0$$

On en déduit:

$$N_{12} = 2F$$

On isole ensuite le noeud 4 car le noeud 2 ne peut pas encore être résolu.



noeud 4

Les équations d'équilibre donnent:

$$N_{45}+X_4+N_{24}\cos(\alpha)=0$$

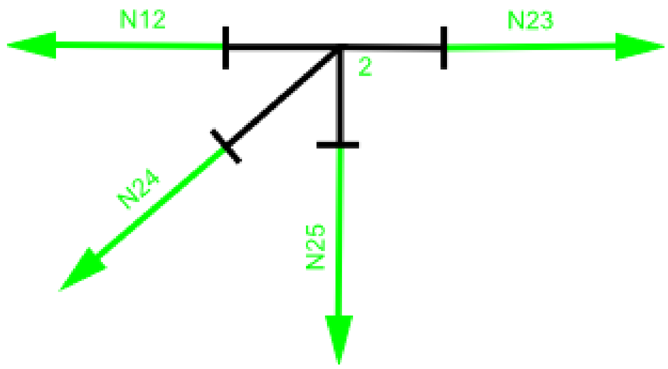
$$Y_4+N_{24}\sin(\alpha)=0$$

On a donc:

$$N_{24}=-\frac{F}{\sin(\alpha)}$$

$$N_{45}=-2F+\frac{F}{\tan(\alpha)}$$

On peut ensuite isoler le noeud 2:



noeud 2

Les équations d'équilibre sont:

$$N_{23}-N_{12}-N_{24}\cos(\alpha)=0$$

$$-N_{24}\sin(\alpha)-N_{25}=0$$

soit:

$$N_{23}=N_{12}+N_{24}\cos(\alpha)$$

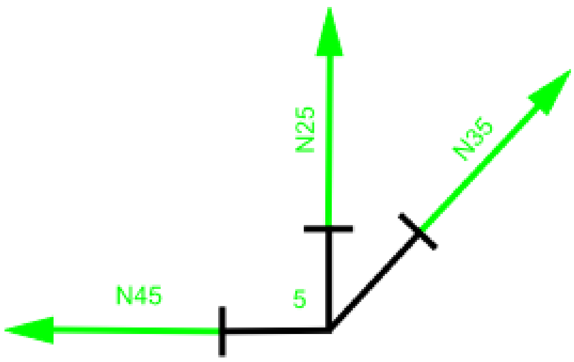
$$N_{25}=-N_{24}\sin(\alpha)$$

et donc:

$$N_{23}=2F-\frac{F}{\sin(\alpha)}\cos(\alpha)$$

$$N_{25} = F$$

On isole ensuite le noeud 5.



noeud 5

1 seule équation d'équilibre suffit ici, par exemple:

$$-N_{45} + N_{35}\cos(\alpha) = 0$$

soit:

$$N_{35} = \frac{1}{\cos(\alpha)}\left(-2F + \frac{F}{\tan(\alpha)}\right)$$

Si on récapitule les résultats on a pour les sollicitations dans les barres:

$$N_{12} = 2F$$

$$N_{23} = 2F - \frac{F}{\sin(\alpha)}\cos(\alpha)$$

$$N_{24} = -\frac{F}{\sin(\alpha)}$$

$$N_{25} = F$$

$$N_{35} = \frac{1}{\cos(\alpha)}\left(-2F + \frac{F}{\tan(\alpha)}\right)$$

$$N_{45} = -2F + \frac{F}{\tan(\alpha)}$$

exercices de calcul de treillis

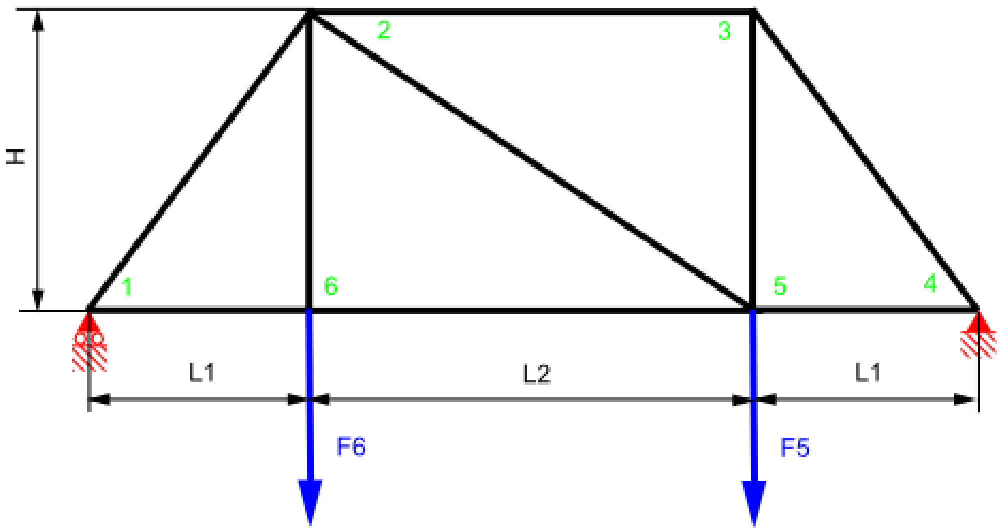
présentation

On présente ici des exercices qui permettent de se familiariser avec les méthodes de calcul des treillis.

exercice numéro 1: calcul de treillis

présentation

Le but de cet exercice est de calculer les sollicitations dans les barres d'un treillis.



structure à étudier

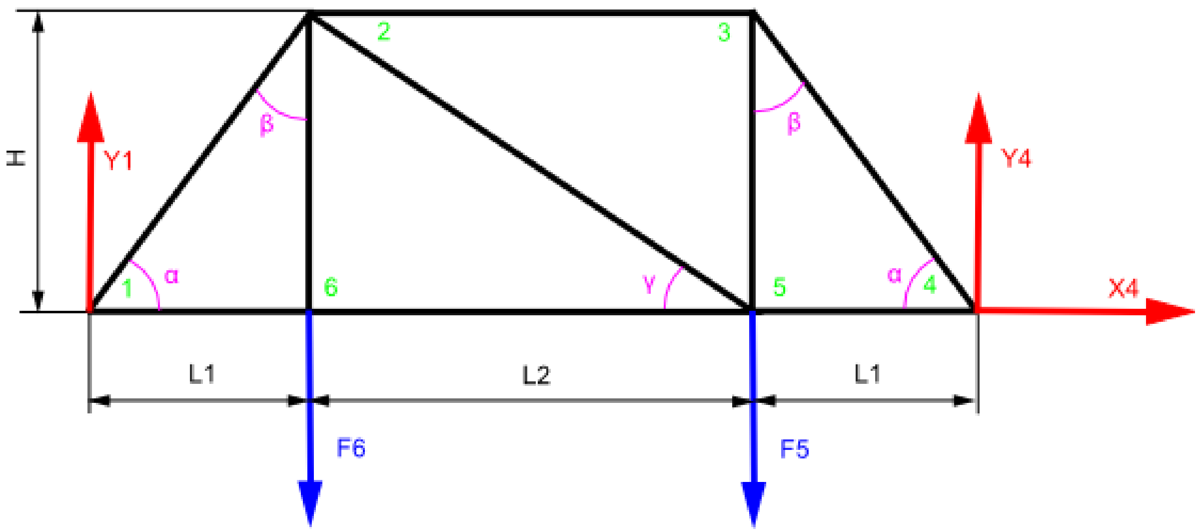
La force F6 a une intensité de 4000 N et F5 de 6000 N. Les longueurs sont de 3 m pour L1, 6 m pour L2, 4 m pour H.

question n° 1

Calculer les sollicitations dans les barres.

solution n° 1

Le modèle peut être représenté tel que ci-dessous:



modèle

On détermine les angles utiles pour la suite.

$$\alpha = 53{,}13\ °$$

$$\beta = 36{,}87\ °$$

$$\gamma = 33{,}69\ °$$

On écrit les équations d'équilibre de la structure globale:

$$X_4 = 0$$

$$Y_1 + Y_4 - F_6 - F_5 = 0$$

$$-F_6 L_1 - F_5 (L_1 + L_2) + Y_4 (2L_1 + L_2) = 0$$

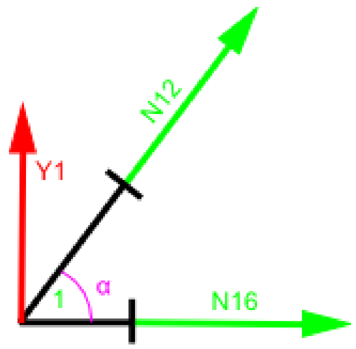
En résolvant ces équations on obtient les réactions:

$$X_4 = 0$$

$$Y_1 = \frac{F_6 L_1 + F_5 L_1 + F_6 L_2}{2L_1 + L_2}$$

$$Y_4 = \frac{F_6 L_1 + F_5 L_1 + F_5 L_2}{2L_1 + L_2}$$

On isole ensuite le noeud 1:



noeud 1

Les équations d'équilibre sont les suivantes:

$$N_{16} + N_{12}\cos(\alpha) = 0$$

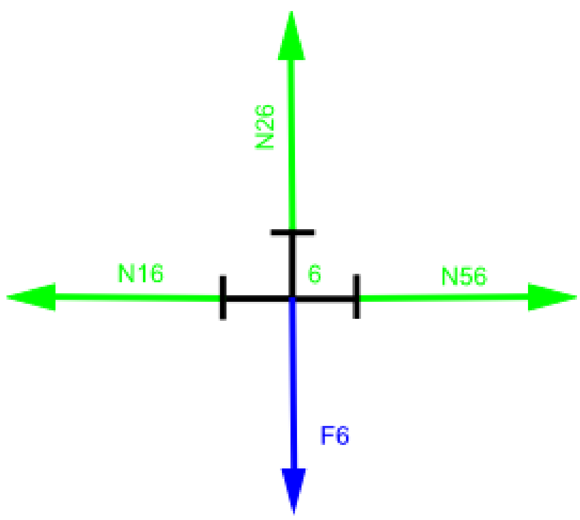
$$Y_1 + N_{12}\sin(\alpha) = 0$$

donc:

$$N_{12} = -\frac{Y_1}{\sin(\alpha)}$$

$$N_{16} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} Y_1$$

On isole ensuite le noeud 6:



noeud 6

Les équations d'équilibre sont:

$$-N_{16} + N_{56} = 0$$

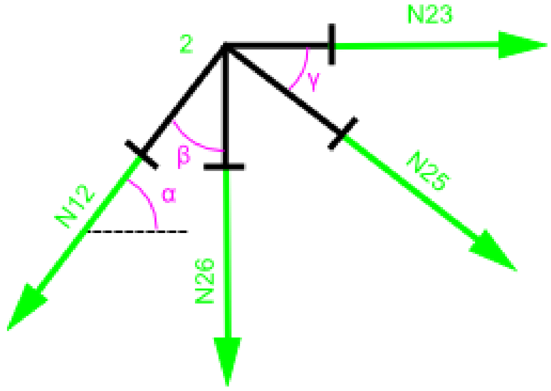
$$-F_6 + N_{26} = 0$$

En résolvant le système d'équations on obtient:

$$N_{56} = \frac{\cos(\alpha)}{\sin(\alpha)} Y_1$$

$$N_{26} = F_6$$

On isole ensuite le noeud 2:



noeud 2

Les équations d'équilibre sont:

$$-N_{12}\cos(\alpha)+N_{23}+N_{25}\cos(\gamma)=0$$

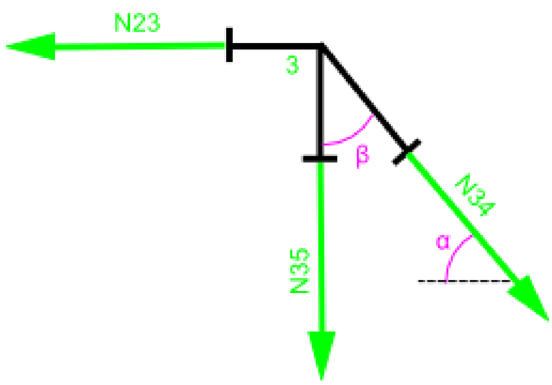
$$-N_{12}\sin(\alpha)-N_{26}-N_{25}\sin(\gamma)=0$$

En résolvant le système on a:

$$N_{23}=\frac{-\cos(\alpha)\sin(\gamma)Y_1+\cos(\gamma)\sin(\alpha)F_6-\cos(\gamma)\sin(\alpha)Y_1}{\sin(\alpha)\sin(\gamma)}$$

$$N_{25}=-\frac{F_6-Y_1}{\sin(\gamma)}$$

on isole ensuite le noeud 3:



noeud 3

Les équations d'équilibre sont:

$$-N_{23}+N_{34}\cos(\alpha)=0$$

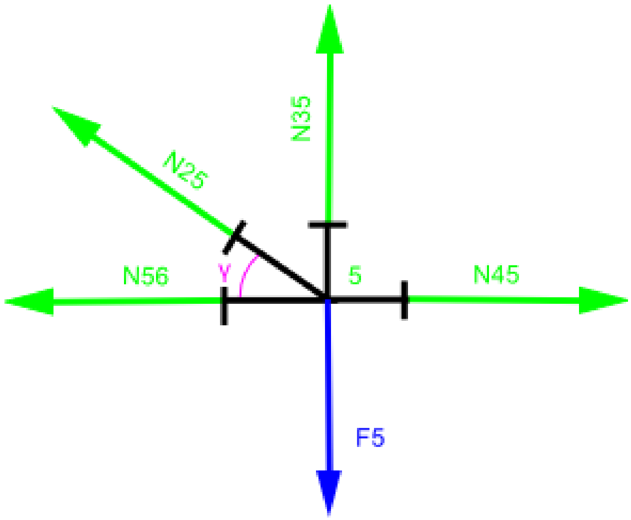
$$-N_{35}-N_{34}\sin(\alpha)=0$$

En résolvant le système on obtient:

$$N_{34}=-\frac{Y_1\cos(\alpha)\sin(\gamma)-\cos(\gamma)\sin(\alpha)F_6+\cos(\gamma)\sin(\alpha)Y_1}{\cos(\alpha)\sin(\alpha)\sin(\gamma)}$$

$$N_{35}=\frac{Y_1\cos(\alpha)\sin(\gamma)-\cos(\gamma)\sin(\alpha)F_6+\cos(\gamma)\sin(\alpha)Y_1}{\cos(\alpha)\sin(\gamma)}$$

on isole ensuite le noeud 5:



noeud 5

L'équations d'équilibre en x donne:

$$-N_{56}-N_{25}\cos(\gamma)+N_{45}=0$$

On obtient:

$$N_{45}=\frac{Y_1\cos(\alpha)\sin(\gamma)-\cos(\gamma)\sin(\alpha)F_6+\cos(\gamma)\sin(\alpha)Y_1}{\sin(\alpha)\sin(\gamma)}$$

résultat n° 1

Les efforts normaux dans les barres sont les suivants:

$$N_{12}=-5625\ \mathrm{N}$$

$$N_{16}=3375\ \mathrm{N}$$

$$N_{23}=-4125\ \mathrm{N}$$

$$N_{25}=901{,}4\ \mathrm{N}$$

$$N_{26}=4000\ \mathrm{N}$$

$$N_{34}=-6875\ \mathrm{N}$$

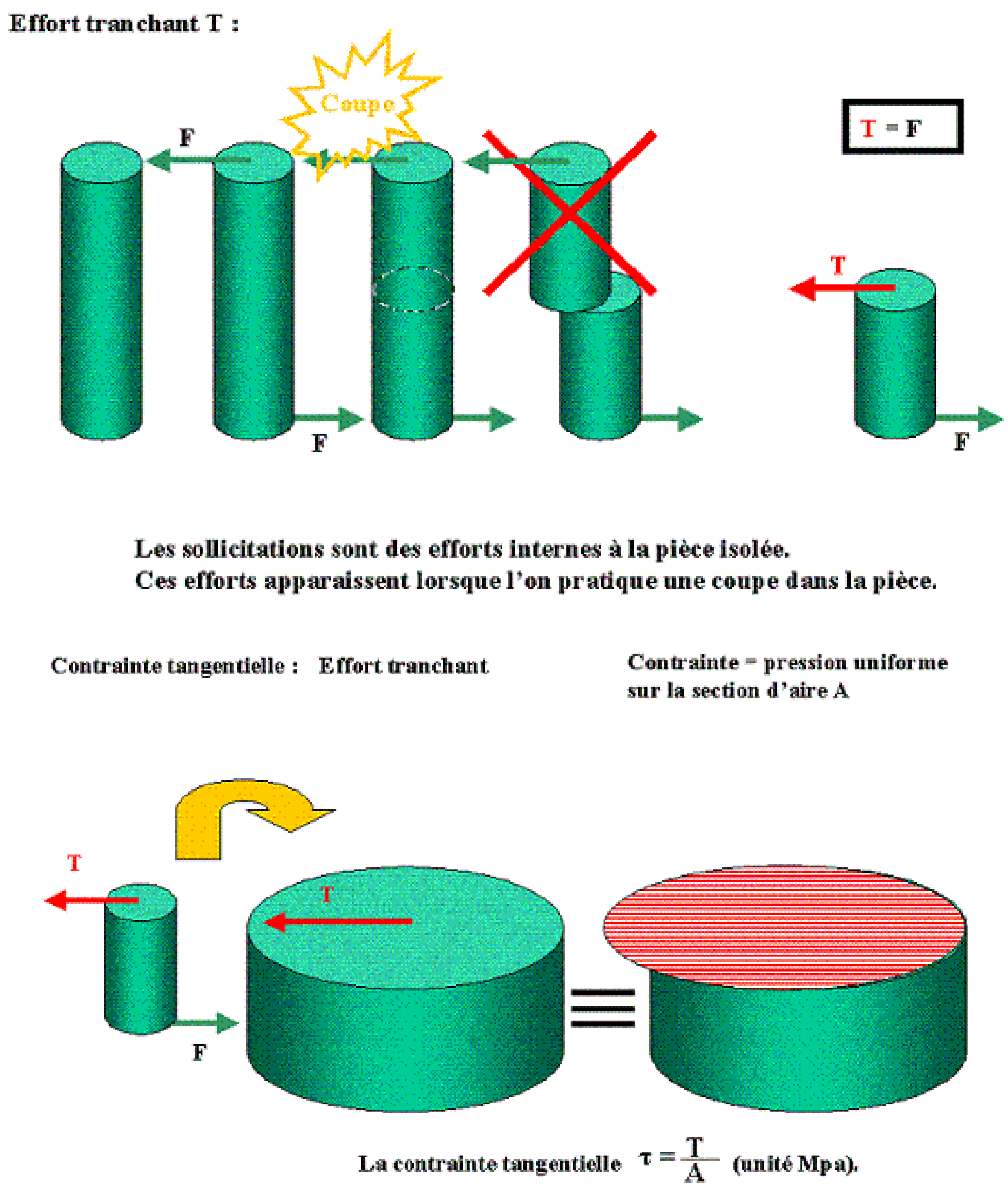
$$N_{35}=5500\ \mathrm{N}$$

$$N_{56}=3375\ \mathrm{N}$$

$$N_{45}=4125\ \mathrm{N}$$

cisaillement pur

introduction



La procédure de dimensionnement en cisaillement pur est la suivante:

- isoler la pièce
- calculer la sollicitation de cisaillement T
- calculer l'aire de la section qui travaille A
- calculer la contrainte τ par la formule : $\tau = \frac{T}{A}$
- vérifier que la contrainte ne dépasse pas la limite admissible du matériau utilisé en cisaillement.

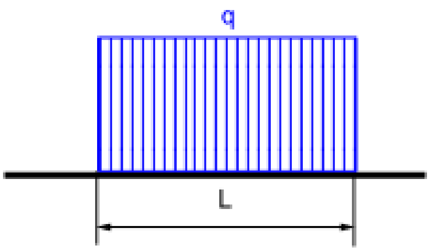
flexion

introduction

Le cas de flexion se décompose en flexion pure et en flexion simple. La flexion pure corresond au cas où seul le moment de flexion est différent de 0, le cas de flexion simple correspond au cas où on a un moment de flexion et un effort tranchant différents de 0. Ce dernier cas est très commun toutefois la plupart du temps pour des poutres élancées on peut négliger l'effort tranchant et on se retrouve alors dans le cas de la flexion pure.

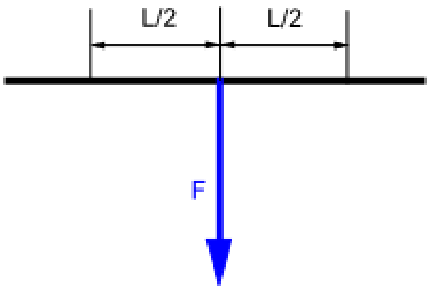
efforts répartis

Pour le calcul manuel des sollicitations en flexion on doit calculer le moment dus aux forces agissant sur la poutre. Dans le cas d'efforts répartis on peut remplacer l'effort réparti par une force équivalente située au centre de gravité de la surface décrite par les efforts répartis. On aura par exemple:



charge uniformément répartie q (N/m)

est équivalent à:

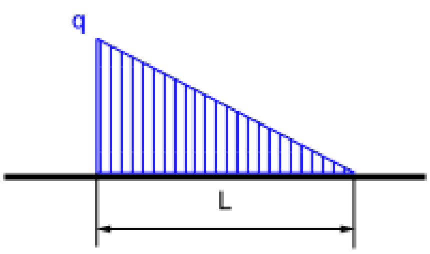


charge équivalente 1

avec:

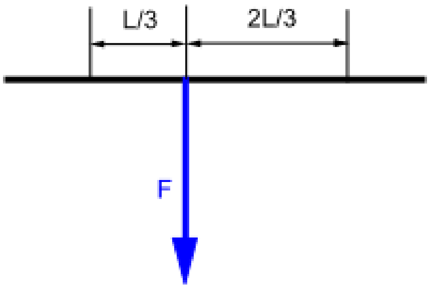
$$F = qL$$

De même:



charge linéairement répartie triangulaire q (N/m)

est équivalent à:

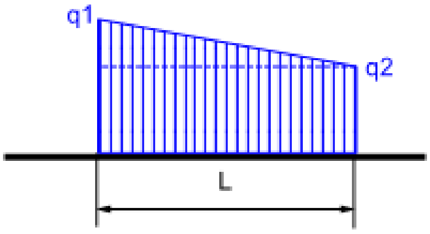


charge équivalente 2

avec:

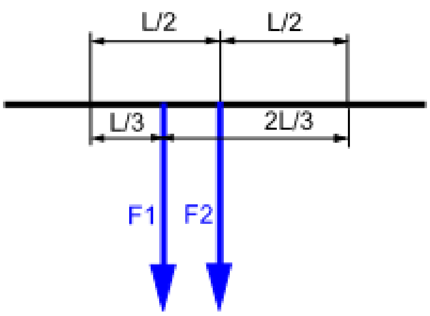
$$F = q\frac{L}{2}$$

On a également:



charge linéairement répartie entre q1 et q2 (N/m)

est équivalent à:



charges équivalentes 3

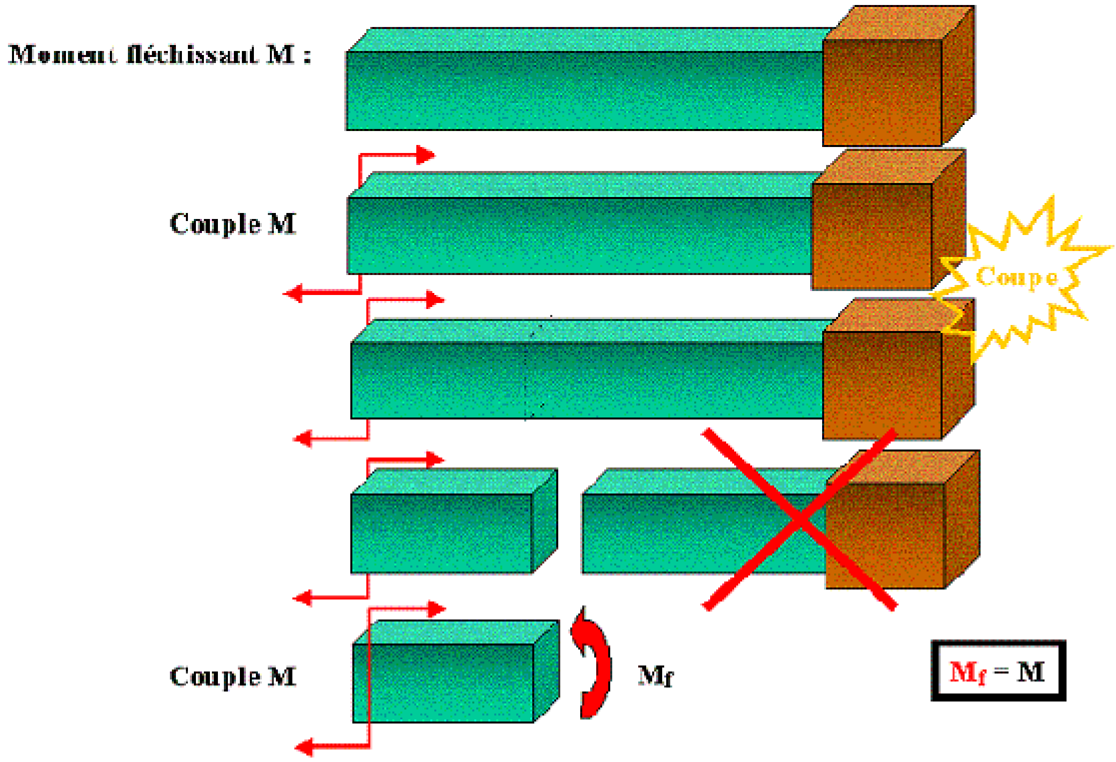
avec:

$$F_1 = (q_1 - q_2)\frac{L}{2}$$

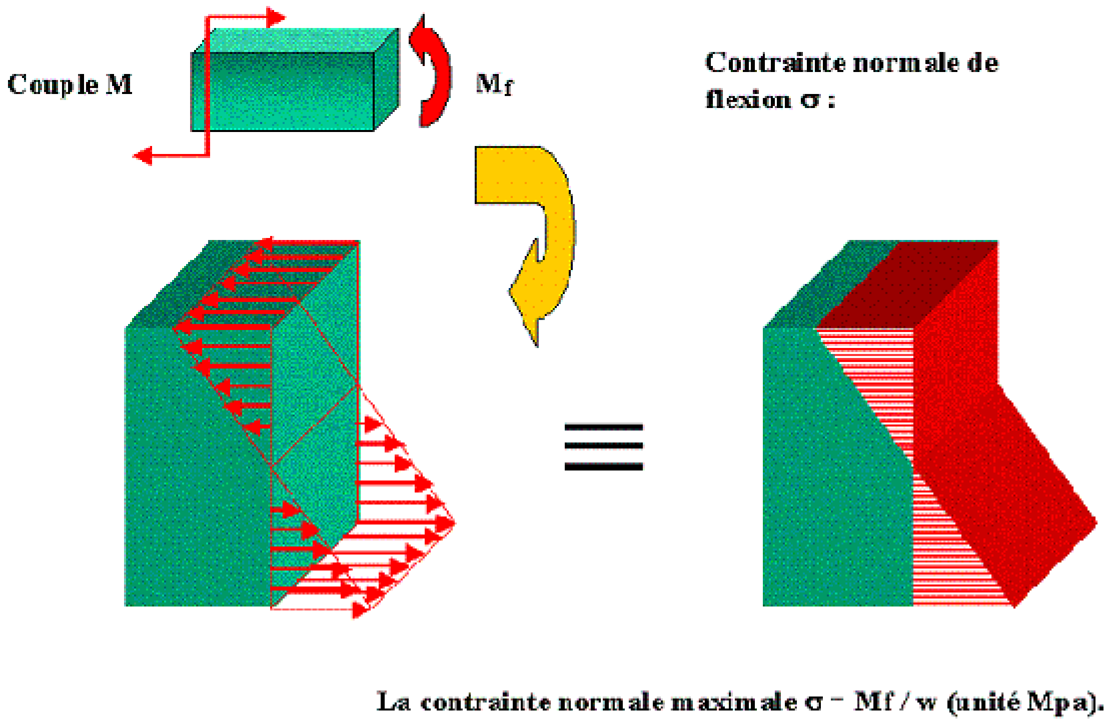
$$F2 = q_2\frac{L}{2}$$

flexion pure

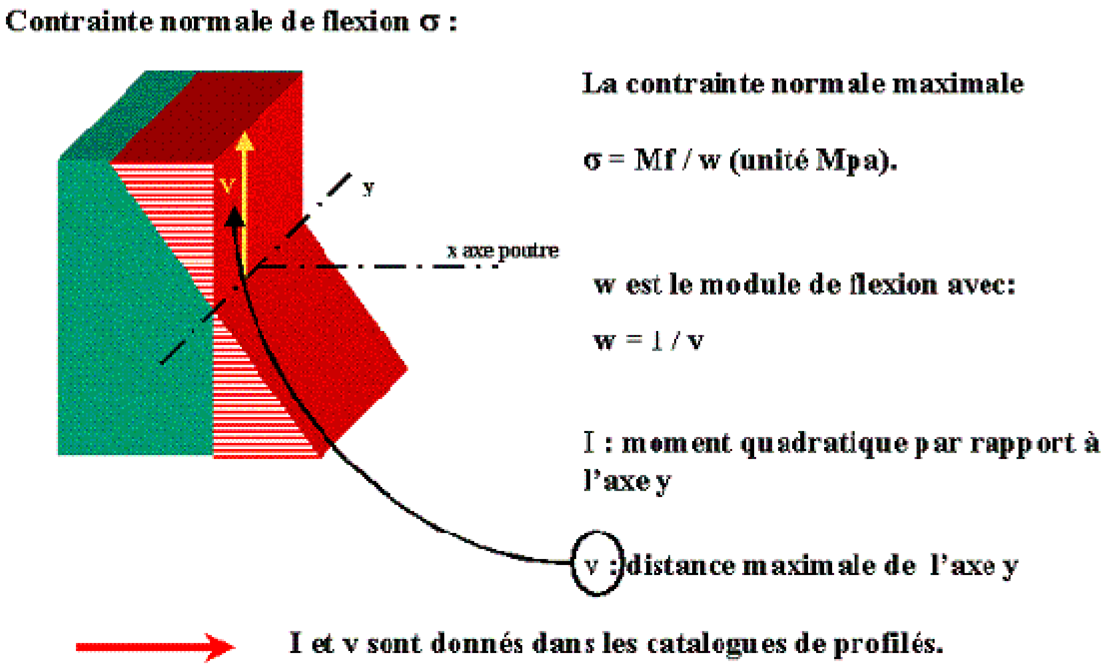
introduction



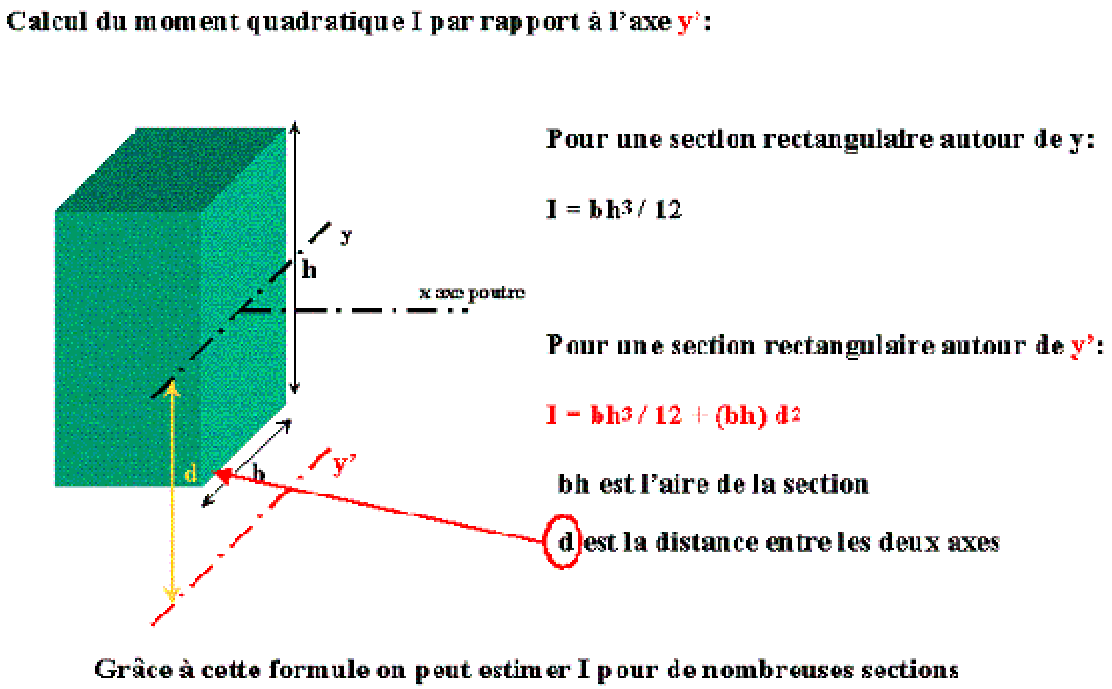
flexion pure 1



flexion pure 2



flexion pure 3



flexion pure 4

La procédure de dimensionnement en flexion pure est la suivante:

- isoler la pièce
- calculer la sollicitation de flexion M
- calculer le module de flexion $w = \frac{I}{V}$
- calculer la contrainte σ par la formule : $\sigma = \frac{M}{W}$
- vérifier que la contrainte ne dépasse pas la limite admissible du matériau utilisé en traction.

exercices: flexion pure

présentation

On présente ici des exercices qui permettent de se familiariser avec les méthodes de calcul des poutres en flexion pure.

exercice numéro 1: calcul de flexion

présentation

On considère un arbre de diamètre 30 mm sur deux paliers espacés de 500 mm. Un volant de 150 kg est situé à 300 mm du premier palier. Le matériau est une nuance S355 suivant NF EN 10025. Le coefficient de sécurité considéré est de 2

question n° 1

Vérifier que le diamètre de l'arbre est suffisant en négligeant le poids propre et en utilisant le critère de contrainte.

solution n° 1

On utilise le modèle d'une poutre en flexion avec un effort ponctuel (poids de la masse). On a:

$$M_f = P\frac{(L-a)a}{L}$$

M_f
: moment de flexion maximal

L
: longueur de la poutre

a
: distance de la force par rapport à l'appui

La contrainte est:

$$\sigma_f = \frac{M_f}{w}$$

M_f
: moment de flexion maximal

w
: module de flexion

On a de plus

$$w = \frac{I}{v}$$

I
: moment quadratique de flexion

v
: rayon de la section circulaire

et

$$I = \frac{\pi D^4}{64}$$

D
: diamètre de la section circulaire

On doit vérifier:

$$\sigma \leq \frac{R_{\mathrm{p02}}}{2}$$

R_{p02}
: contrainte limite d'élasticité du matériau

On a:

$$\sigma = 68 \ \mathrm{MPa}$$

$$\frac{R_{p02}}{2} = 177{,}5\ \mathrm{MPa}$$

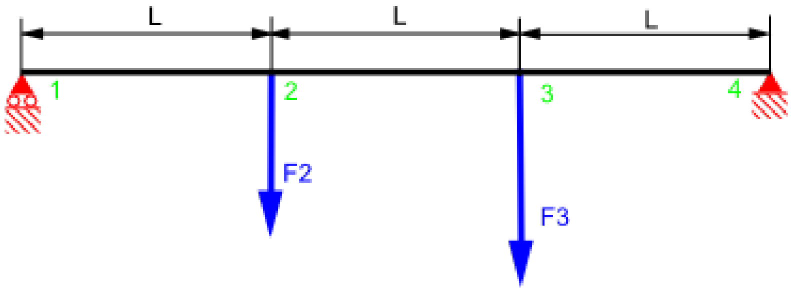
résultat n° 1

Le critère de contrainte est satisfait.

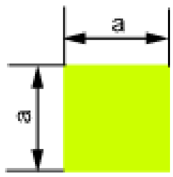
exercice numéro 2: calcul de flexion

présentation

Le but de cet exercice est de dimensionner la section de la poutre en supposant une section carrée pleine.



structure à étudier



section

On suppose une contrainte limite d'élasticité telle que:

$$R_{p0,2} = 235 \text{ MPa}$$

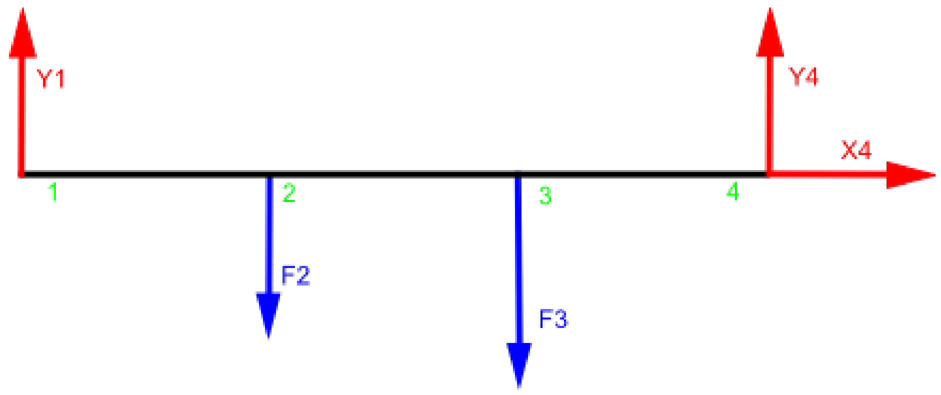
Le coefficient de sécurité est de 1,5. La force F2 est de 7500 N, F3 de 15000 N. La longueur L de 800 mm.

question n° 1

Calculer la dimension a de la section nécessaire en choisissant une section carrée pleine.

solution n° 1

On isole la poutre:



modèle

Les équations d'équilibre sont:

$$X_4 = 0$$

$$Y_1 + Y_4 - F_2 - F_3 = 0$$

$$-F_2 L - F_3 2L + Y_4 3L = 0$$

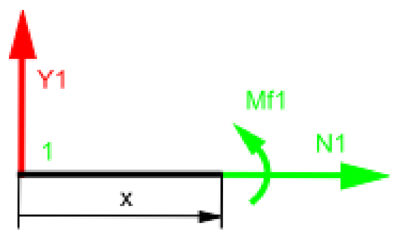
On obtient les réactions en résolvant le système d'équations:

$$X_4 = 0$$

$$Y_1 = \frac{2}{3} F_2 + \frac{1}{3} F_3$$

$$Y_4 = \frac{1}{3} F_2 + \frac{2}{3} F_3$$

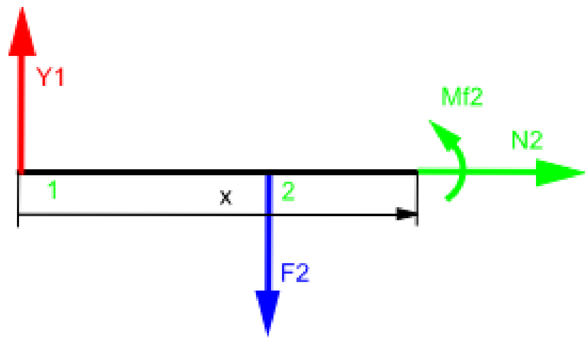
On calcule ensuite les sollicitations dans les 3 parties de la poutre en négligeant l'effort tranchant et on obtient pour les partie 1,2 et 3:



portion 1

$$N_1 = 0$$

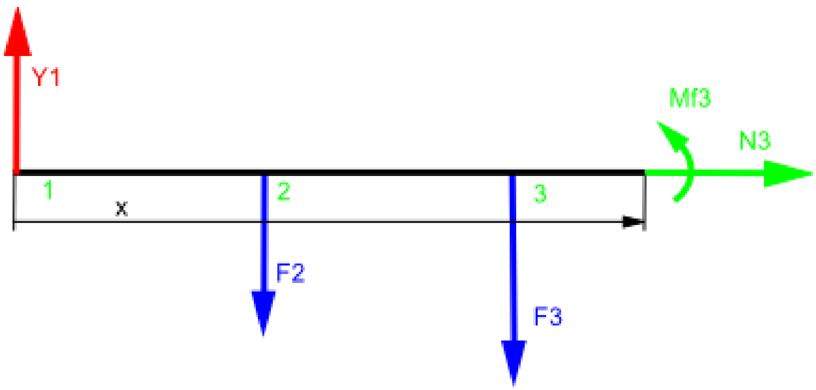
$$M_{f1} - Y_1 x = 0$$



portion 2

$$N_2 = 0$$

$$M_{f2} - Y_1 x + F_2 (x - L) = 0$$



portion 3

$$N_3 = 0$$

$$M_{f3} - Y_1 x + F_2 (x - L) + F_3 (x - 2L) = 0$$

On obtient donc pour les moments de flexion dans les différentes partie de la poutre:

$$M_{f1} = \frac{2}{3} x F_2 + \frac{1}{3} x F_3$$

$$M_{f2} = -\frac{1}{3} x F_2 + \frac{1}{3} x F_3 + F_2 L$$

$$M_{f3} = -\frac{1}{3} x F_2 - \frac{2}{3} x F_3 + F_2 L + 2 F_3 L$$

Le moment maximum sur la poutre est obtenu pour le point 3.

$$M_{fmax} = 10000 \text{ Nm}$$

On calcule ensuite la contrainte de flexion qu'on limite à la valeur de la contrainte limite d'élasticité du métériau divisée par le coefficient de sécurité. On a

$$\sigma_{fmax} = \frac{M_{fmax}}{w}$$

avec

$$w = \frac{I}{v}$$

et

$$I = \frac{aa^3}{\frac{a}{2}}$$

On calculer la valeur minimale avec le critère:

$$\sigma < \frac{R_{02}}{1{,}5}$$

résultat n° 1

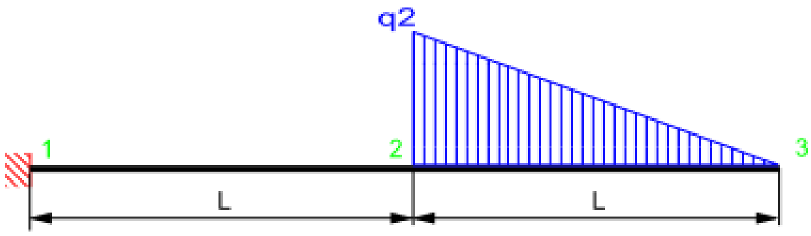
on obtient pour la valeur minimale de a:

$$a_{\text{mini}} = 72{,}6 \ \text{mm}$$

exercice numéro 3: calcul de flexion

présentation

Le but de cet exercice est de calculer une poutre console sous chargement linéique variable. Le matériau considéré a une contrainte admissible de 160 MPa La figure ci-dessous représente la structure et le chargement.



structure à étudier

La force répartie q2 est de 1200 N/m et la longueur L de 2 m.

question n° 1

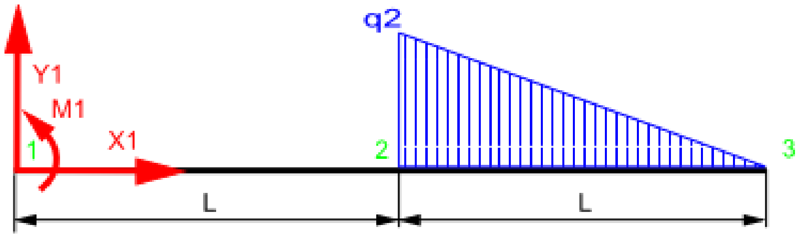
Calculer la sollicitation de flexion (moment fléchissant) et le représenter sur un diagramme.

question n° 2

Déterminer le module de flexion w minimum

solution n° 1

On isole la poutre:



modèle global

Les équations d'équilibre sont:

$$Y_1 - q_2\frac{L}{2} = 0$$

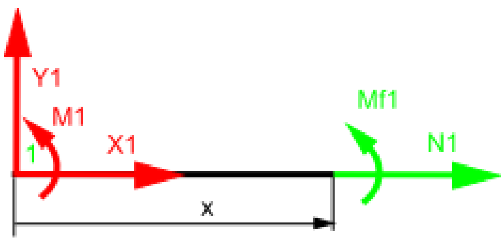
$$M_1 - q_2\frac{L}{2}\left(L + \frac{L}{3}\right) = 0$$

on en déduit:

$$Y_1 = q_2\frac{L}{2}$$

$$M_1 = \frac{2}{3}q_2L^2$$

On isole ensuite la portion 1 de la poutre entre les noeuds 1 et 2:



portion 1

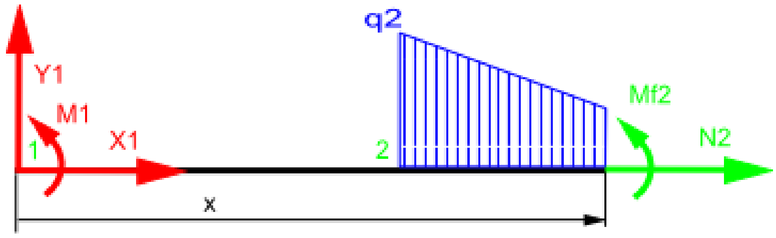
Les équations d'équilibre en flexion sont:

$$M_1 - Y_1x + M_{f1} = 0$$

soit:

$$M_{f1} = q_2\frac{L}{2}x - \frac{2}{3}q_2L^2$$

on isole ensuite la portion 2 entre les noeuds 2 et 3:



portion 2

l'expression de la charge linéique en fonction de la coordonnée x est la suivante:

$$q(x) = -q_2 \frac{x}{L} + 2q_2$$

l'équation d'équilibre en flexion est la suivante:

$$-Y_1 x + M_1 + M_{f2} + [q_2 - q(x)] \frac{x-L}{2} \frac{2(x-L)}{3} + q(x) x - L \frac{x-L}{2} = 0$$

on obtient:

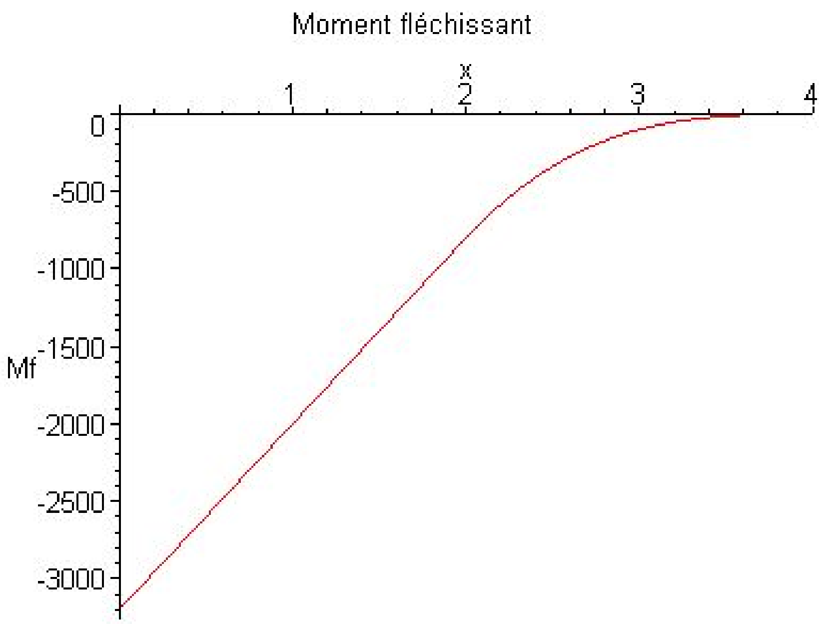
$$M_{f2} = -\frac{1}{6} q_2 \frac{-12xL^2 + 8L^3 - x^3 + 6Lx^2}{L}$$

En ramplaçant les valeurs littérales par les valeurs numériques on obtient:

$$M_{f1} = 100(12x - 32)$$

$$M_{f2} = 100(x^3 - 12x^2 + 48x - 64)$$

on peut tracer le moment de flexion sur la poutre:



moment fléchissant

solution n° 2

Il faut que la contrainte maximale soit inférieure à la contrainte admissible, soit:

$$\frac{M_{\mathrm{fmax}}}{w} < \sigma_{\mathrm{admissible}} = \frac{R_{\mathrm{p02}}}{\alpha}$$

résultat n° 1

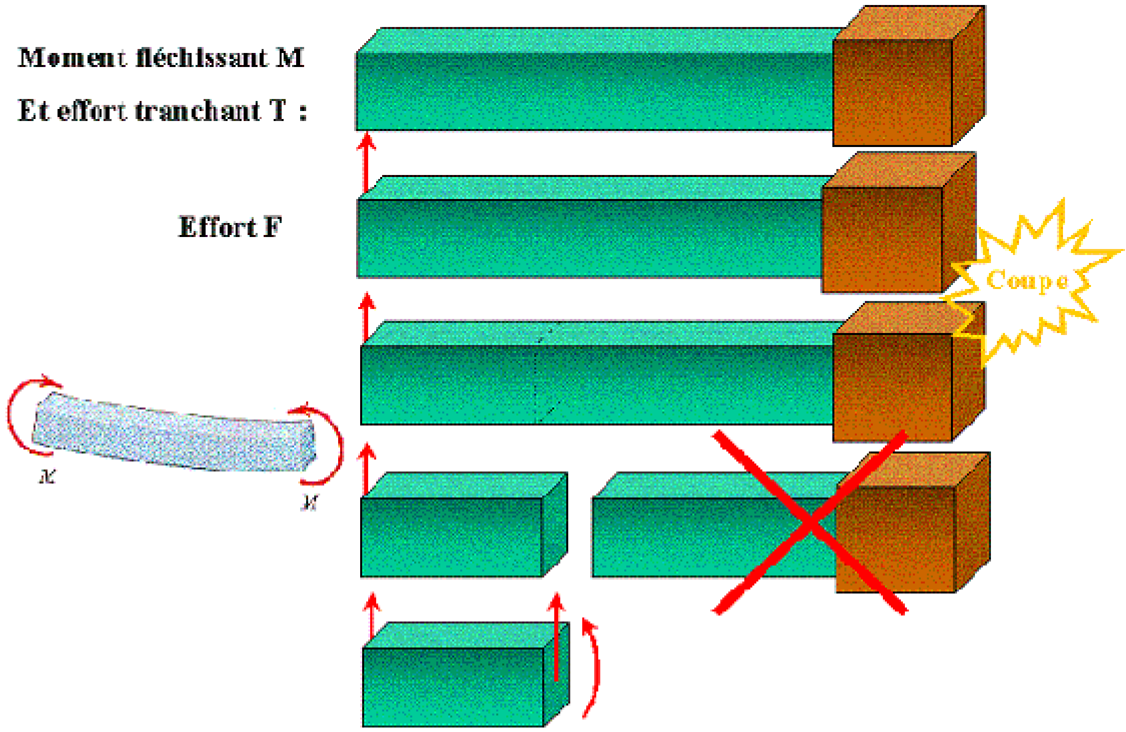
$$M_{\mathrm{max}} = 3200\ \mathrm{Nm}$$

résultat n° 2

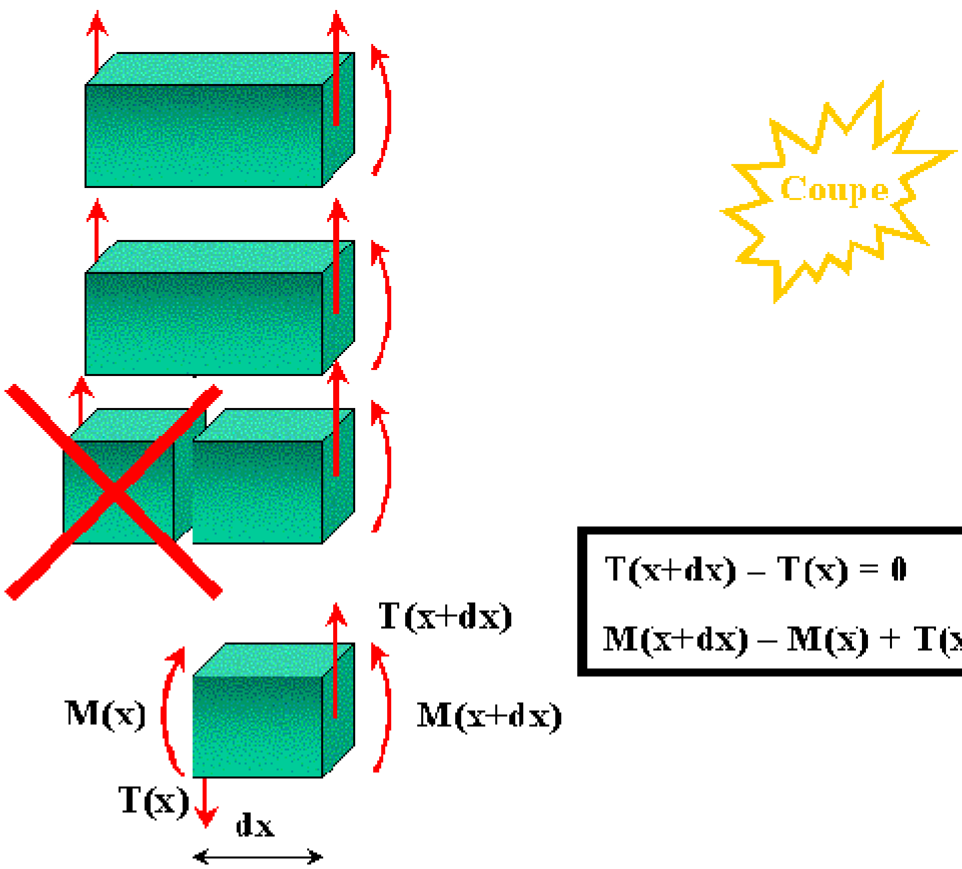
$$w > 20\ \mathrm{cm}^3$$

flexion simple

introduction



cas 1

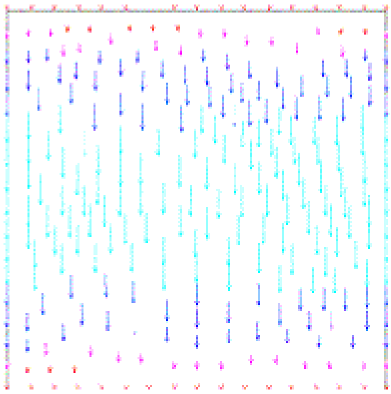


$$T(x+dx) - T(x) = 0$$

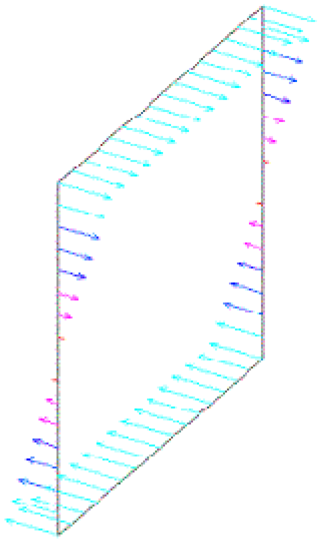
$$M(x+dx) - M(x) + T(x)\,dx = 0$$

cas 2

Répartition de la contrainte de cisaillement τ :



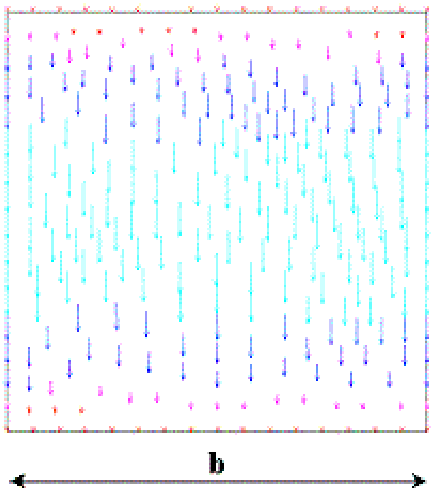
Répartition de la contrainte normale σ :



cas 3

Répartition de la contrainte de cisaillement τ :

$$\tau = \frac{TS}{Ib} = \frac{T}{\frac{Ib}{S}} = \frac{T}{A_r}$$



S : moment statique

I : moment quadratique

T : effort tranchant

A_r : Aire réduite de la section

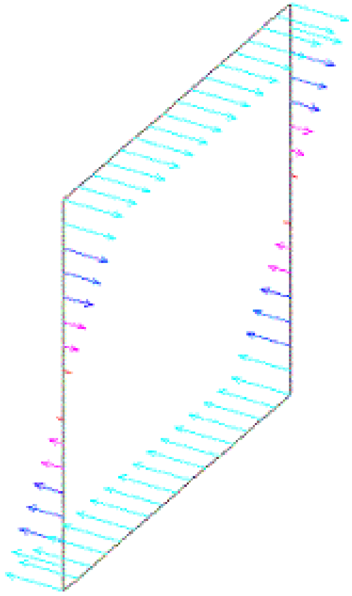
$$\boxed{\tau = \frac{T}{A_r}}$$

$$A_r = \frac{2}{3} A \text{ (rectangulaire)}$$

$$A_r = \frac{3}{4} A \text{ (circulaire)}$$

cas 4

Répartition de la contrainte normale σ :



$$\sigma_{max} = \frac{M}{w} \qquad w = \frac{I}{v}$$

M: moment fléchissant

w : module de flexion

I : moment quadratique

v : distance de la fibre la plus éloignée de la fibre neutre

cas 5

La procédure de dimensionnement en flexion simple est la suivante:

. isoler la pièce
. calculer les sollicitations de flexion simple M et T
. calculer le module de flexion w et l'aire réduite A_r
· calculer la contrainte σ par la formule : σ =M/w et τ par la formule : $\tau = \frac{T}{A_r}$
. vérifier que la contrainte combinée ne dépasse pas la limite admissible du matériau utilisé en traction.

exercices: flexion simple

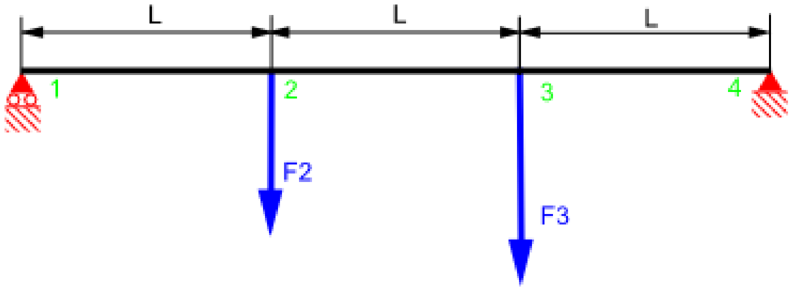
présentation

On présente ici des exercices qui permettent de se familiariser avec les méthodes de calcul des poutres en flexion simple.

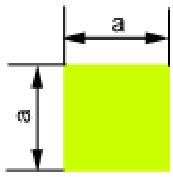
exercice numéro 1: calcul de flexion simple

présentation

Le but de cet exercice est de dimensionner la section de la poutre en supposant une section carrée pleine. On tiendra compte de l'effort tranchant.



structure à étudier



section

On suppose une contrainte limite d'élasticité telle que:

$$R_{p0,2} = 235 \text{ MPa}$$

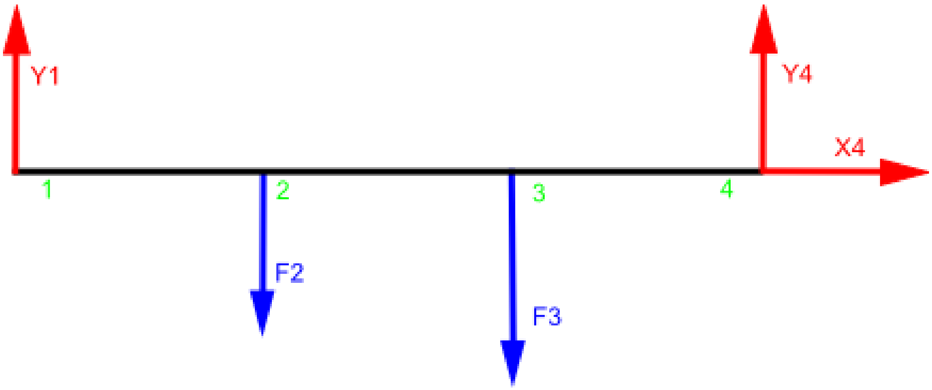
Le coefficient de sécurité est de 1,5. La force F2 est de 7500 N, F3 de 15000 N. La longueur L de 800 mm.

question n° 1

Calculer la dimension a de la section nécessaire en choisissant une section carrée pleine.

solution n° 1

On isole la poutre:



modèle

Les équations d'équilibre sont:

$$X_4 = 0$$

$$Y_1 + Y_4 - F_2 - F_3 = 0$$

$$-F_2L - F_32L + Y_43L = 0$$

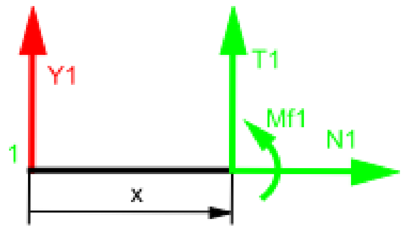
On obtient les réactions en résolvant le système d'équations:

$$X_4 = 0$$

$$Y_1 = \frac{2}{3}F_2 + \frac{1}{3}F_3$$

$$Y_4 = \frac{1}{3}F_2 + \frac{2}{3}F_3$$

On calcule ensuite les sollicitations dans les 3 parties de la poutre et on obtient pour les partie 1,2 et 3:

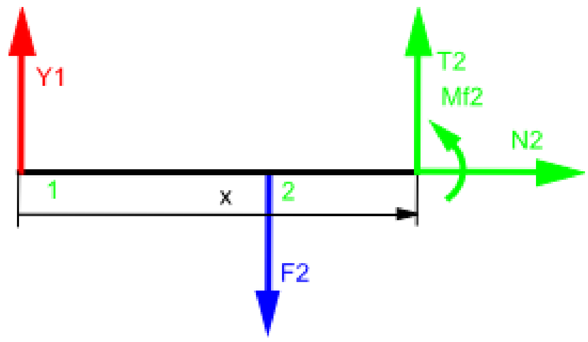


portion 1

$$N_1 = 0$$

$$T_1 + Y_1 = 0$$

$$M_{f1} - Y_1x = 0$$

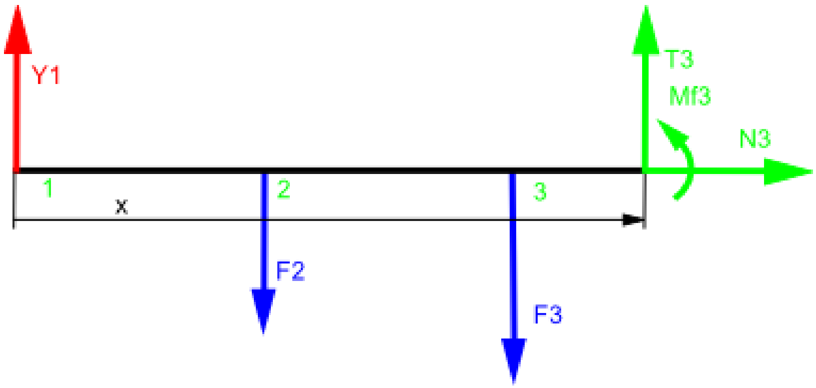


portion 2

$$N_2 = 0$$

$$T_2 + Y_1 - F_2 = 0$$

$$M_{f2} - Y_1 x + F_2 (x - L) = 0$$



portion 3

$$N_3 = 0$$

$$T_3 + Y_1 - F_2 - F_3 = 0$$

$$M_{f3} - Y_1 x + F_2 (x - L) + F_3 (x - 2L) = 0$$

On obtient donc pour les efforts tranchants et les moments de flexion dans les différentes partie de la poutre:

$$M_{f1} = \frac{2}{3} x F_2 + \frac{1}{3} x F_3$$

$$T_1 = -\frac{2}{3} F_2 - \frac{1}{3} F_3$$

$$M_{f2} = -\frac{1}{3} x F_2 + \frac{1}{3} x F_3 + F_2 L$$

$$T_2 = \frac{1}{3} F_2 - \frac{1}{3} F_3$$

$$M_{f3} = -\frac{1}{3} x F_2 - \frac{2}{3} x F_3 + F_2 L + 2 F_3 L$$

$$T_3 = \frac{1}{3} F_2 + \frac{2}{3} F_3$$

Le moment maximum sur la poutre est obtenu pour le point 3.

$$M_{\text{fmax}} = 10000 \text{ Nm}$$

L'effort tranchant est maximum entre les points 2 et 3.

$$T_{\text{max}} = 12500 \text{ N}$$

On calcule ensuite la contrainte de flexion.

$$\sigma_{\text{fmax}} = \frac{M_{\text{fmax}}}{w}$$

avec

$$w = \frac{I}{v}$$

et

$$I = \frac{aa^3}{\frac{a}{2}}$$

On estime la valeur minimale de a avec le critère:

$$\sigma < \frac{R_{02}}{1{,}5}$$

La contrainte tangentielle est:

$$\tau = \frac{T_{\text{max}}}{A_r}$$

A_r
aire réduite de la section

où pour une section carrée pleine:

$$A_r = \frac{2}{3}a^2$$

compte-tenu de la faible valeur de la contrainte tangentielle maximale et du fait qu'elle se situe au centre de la section, on peut la négliger.

résultat n° 1

on obtient pour la valeur minimale de a:

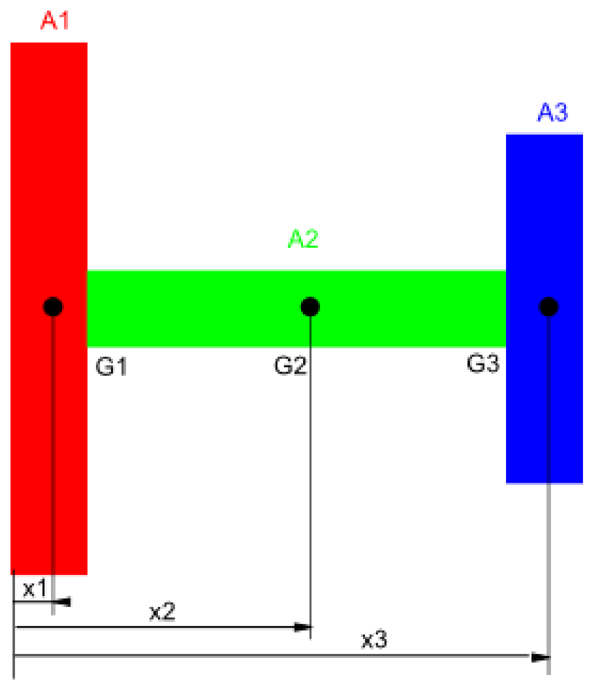
$$a_{\text{mini}} = 72{,}6 \text{ mm}$$

caractéristiques section

introduction

On présente ici le calcul des principales caractéristiques géométriques d'une section utiles pour le calcul des contraintes et des flèches.

centre de gravité



centre de gravité

La position du centre de gravité d'une section peut se calculer de la façon suivante:

$$x = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

x
: position du centre de gravité de la section totale suivant x

x_1
: position du centre de gravité de la section A1 suivant x

x_2
: position du centre de gravité de la section A2 suivant x

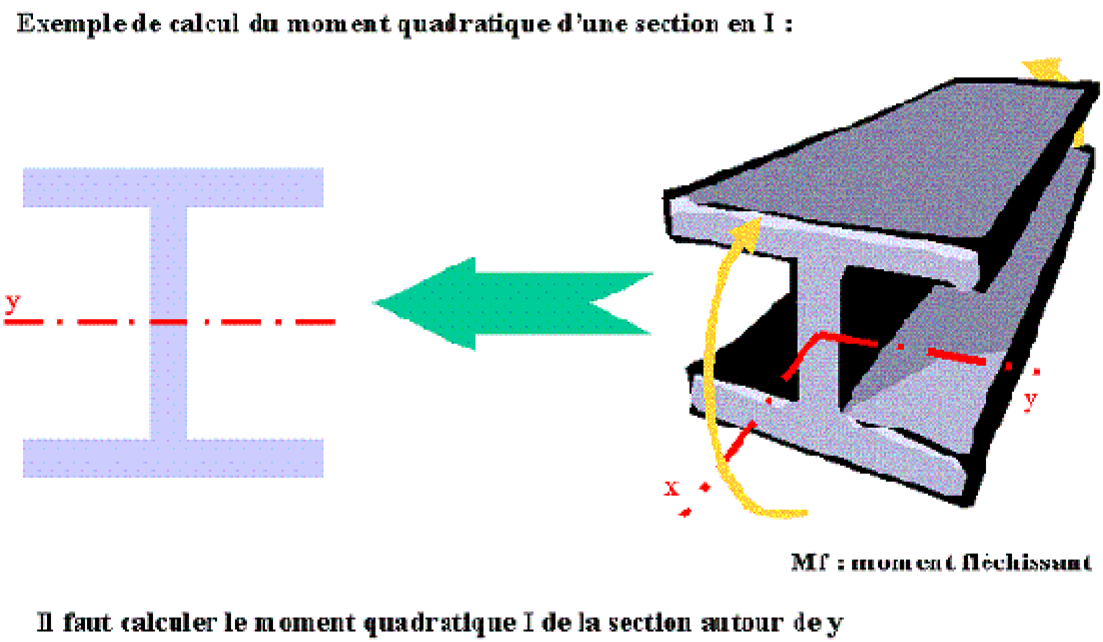
x_3
: position du centre de gravité de la section A3 suivant x

A_1
: aire de la section A1

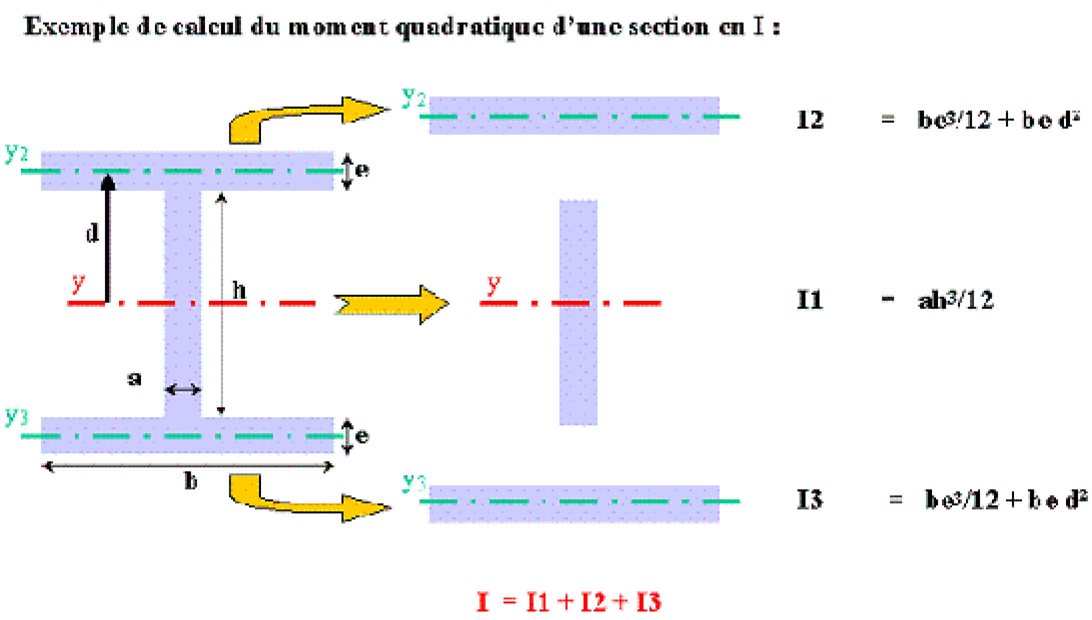
A_2
: aire de la section A2

A_3
: aire de la section A3

moment quadratique



moment quadratique 1



moment quadratique 1

exercices de calcul de sollicitations simples

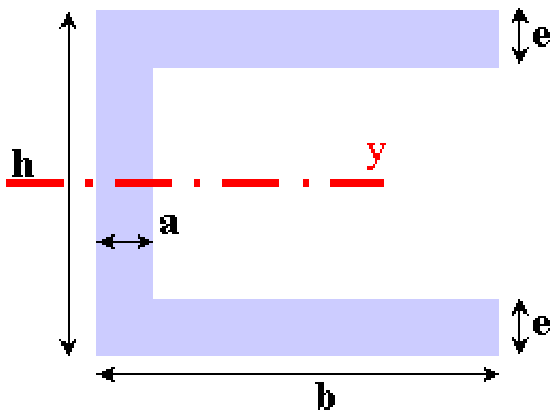
présentation

On présente ici des exercices qui permettent de se familiariser avec les méthodes de calcul des caractéristiques de section.

exercice numéro 1: calcul de caractéristiques de section (flexion)

présentation

Le but de cet exercice est de calculer les caractéristiques d'une section. La section est représentée ci-dessous.



section à étudier

$e = 12 \text{ mm}$

$a = 12 \text{ mm}$

$h = 100 \text{ mm}$

$b = 120 \text{ mm}$

question n° 1

Calculer le moment quadratique I par rapport à l'axe y.

solution n° 1

$$I = a\frac{\left(h\text{-}2e\right)^3}{12} + 2\left[\left(\frac{be^3}{12}\right) + \left(\frac{h}{2} - \frac{e}{2}\right)^2 eb\right]$$

résultat n° 1

$$I = 6\ 049\ 216\ \text{mm}^4$$

calcul de flèche

introduction

Pour calculer la flèche par la méthode de la déformée on utilise la relation suivante:

méthode de la déformée

Pour calculer la flèche par la méthode de la déformée on utilise la relation suivante:

$$M = EI\,y''$$

M
: moment de flexion dans la poutre

E
: module de Young du matériau

I
: moment quadratique de la section

y''
: dérivée seconde de la flèche

Les conditions limites permettent de calculer les constantes d'intégration

méthode utilisant le théorème de Castigliano

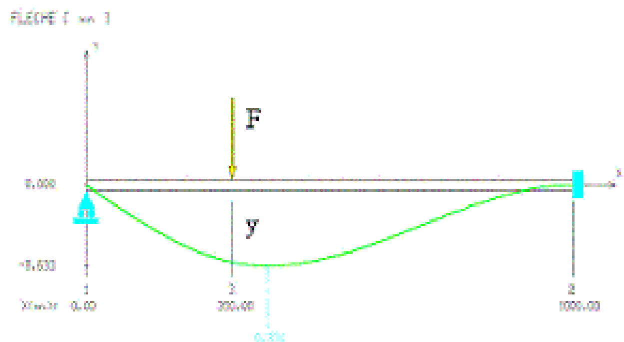
Calcul de la flèche : Théorème de Castigliano

Energie de déformation élastique en flexion d'une poutre:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^l \frac{M^2}{EI}\,dx$$

On obtient la flèche en dérivant l'énergie par rapport à l'effort F:

$$y = \frac{\partial W}{\partial F}$$



flèche

exercices de calcul de flèche

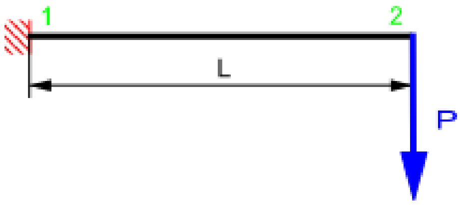
présentation

On présente ici des exercices qui permettent de se familiariser avec les méthodes de calcul des flèches.

exercice numéro 1: calcul de flèche

présentation

Le but de cet exercice est de calculer la fléche suivant différente méthode. La figure ci-dessous décrit la poutre à étudier



structure à étudier

question n° 1

Calculer la flèche maximale par la méthode de la déformée.

question n° 2

Calculer la flèche maximale par le théorème de Castigliano.

solution n° 1

Le moment de flexion dans la poutre a pour expression:

$$M = P(\mathrm{L} - x)$$

L'équation de la déformée est donc:

$$EIy'' = PL - Px$$

on intègre une première fois en fonction de x et on fait apparaître une première constante d'intégration:

$$EIy' = PLx - PL\frac{x^2}{2} + C_1$$

On intègre une deuxième fois et on fait apparaître une deuxième constante d'intégration:

$$EIy = PL\frac{x^2}{2} - PL\frac{x^3}{3} + C1x + C_2$$

on peut calculer les constantes d'intégration grâce aux conditions limites. A l'origine la flèche et la pente (dérivée) doivent être nulles, donc:

$$C_1 = 0$$

$$C_2 = 0$$

solution n° 2

Le moment de flexion dans la poutre a pour expression:

$$M = P(\mathrm{L} - x)$$

l'énergie de déformation élastique due à la flexion pure de la poutre est:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{M^2}{EI}\mathrm{dx}$$

soit:

$$W = \frac{1}{2}\int_0^L \frac{[P(\mathrm{L} - x)]^2}{EI}\mathrm{dx}$$

on obtient:

$$W = \frac{P^2L^3}{6EI}$$

Pour calculer la flèche au point d'application de la force correspondant à la flèche maximale ici, il faut dériver par rapport à P

$$y_{\max} = \frac{\partial W}{\partial P}$$

résultat n° 1

$$y_{\max} = \frac{PL^3}{3EI}$$

résultat n° 2

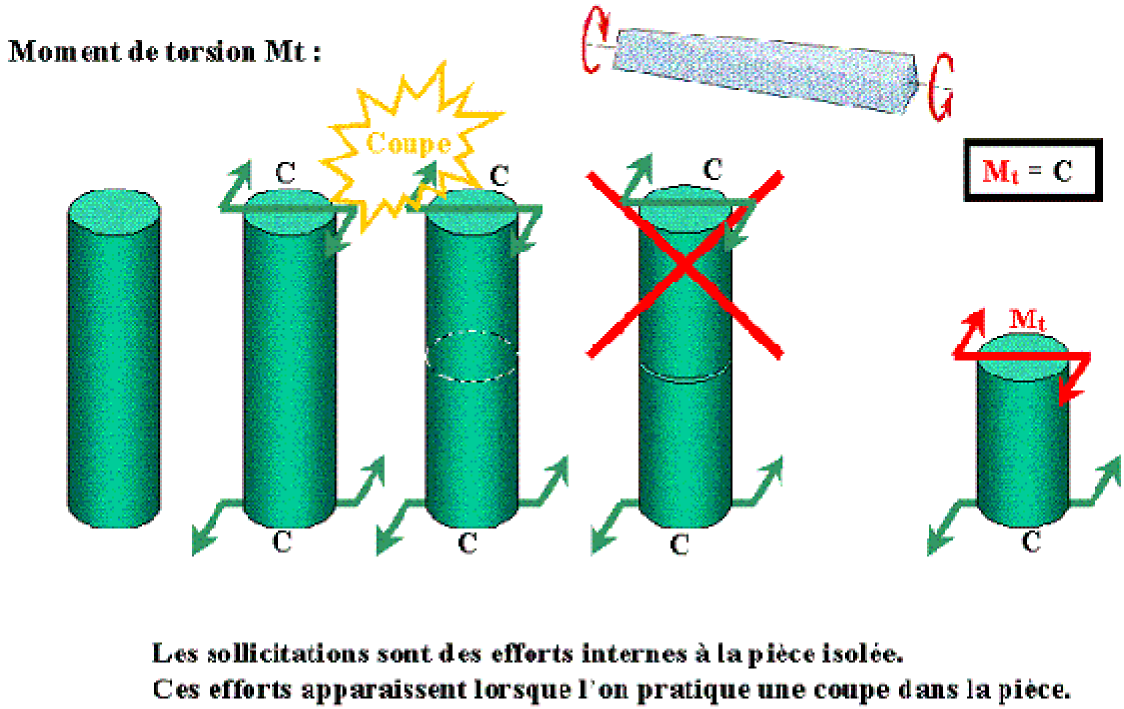
$$y_{\max} = \frac{PL^3}{3EI}$$

torsion

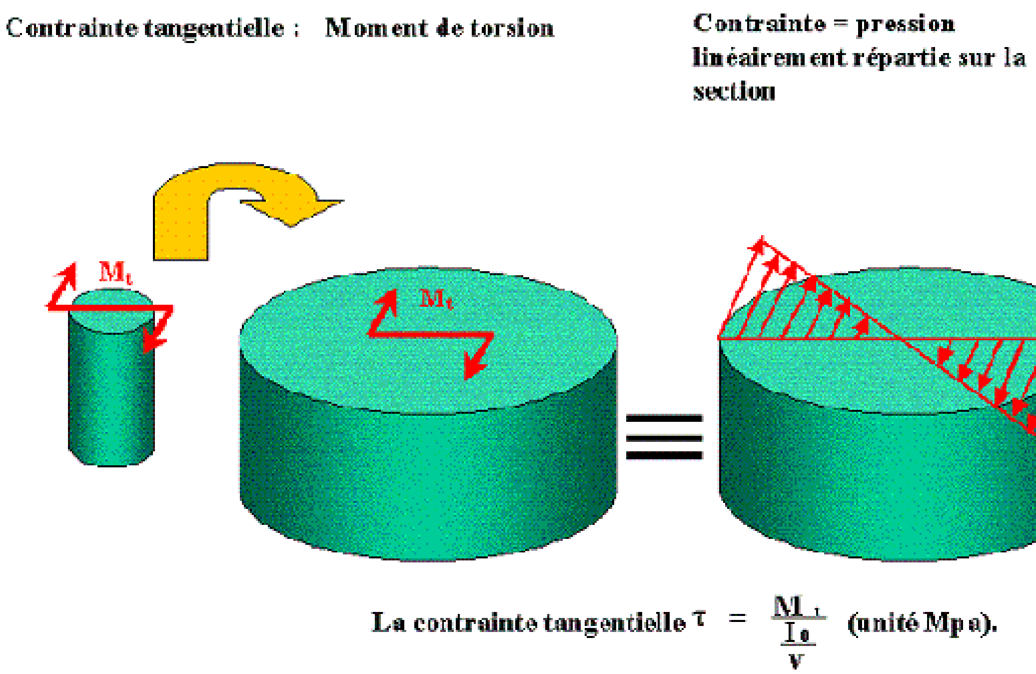
introduction

La torsion correspond au cas où seul le moment de torsion est différent de 0. La torsion simple correspond au cas de l'application d'un moment de torsion sur une section circulaire pleine. C'est le cas courant des arbres de transmission où on la combine généralement avec de la flexion. Le cas des sections ouvertes (I,U) est très différent. Ces sections sont très peu résistantes en torsion et il est conseillé de ne jamais les solliciter en torsion. Pour le cas des sections fermées avec paroi minces on peut calculer la torsion par des formules approchées.

torsion simple



torsion 1



torsion 2

La procédure de dimensionnement en torsion simple est la suivante:

- isoler la pièce
- calculer la sollicitation de torsion M_t
- calculer le module de torsion $\frac{I_0}{v}$
- calculer la contrainte τ par la formule : $\tau = \frac{M_t}{\frac{I_0}{v}}$
- vérifier que la contrainte ne dépasse pas la limite admissible du matériau utilisé en cisaillement.

sections ouvertes

Ce type de section résiste très mal à la torsion. On peut estimer le module de torsion grâce à la formule suivante

$$J = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} b_i t_i^3$$

J
: moment quadratique

b
: longueur des portions rectangulaires de la section

t
: épaisseur des portions rectangulaires de la section

n
: nombre de portions rectangulaires de la section

Calcul de la contrainte de torsion pour les sections ouvertes

$$\tau = \frac{M_t \quad t_{\max}}{J}$$

J
: moment quadratique

τ
: contrainte de torsion maximale dans la section

$t_{\max}$
: épaisseur maximale

M_t
: moment de torsion sur la section

sections fermées à paroi mince

On donne ici des relations approchées qui permettent d'estimer les contraintes de torsion dans des sections tubulaires dont la paroi est mince par rapport aux dimensions de la section. La contrainte tangentielle de torsion dans ce cas peut être estimée par la relation suivante:

$$\tau = \frac{M_t}{2A_m e_m}$$

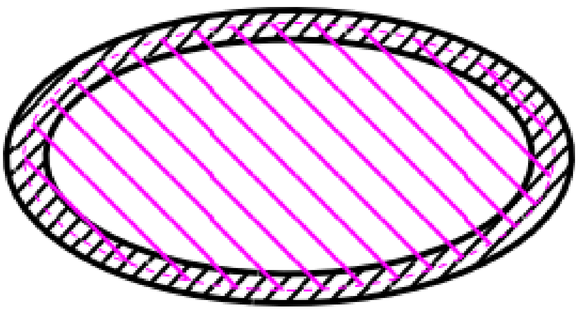
τ
: contrainte tangentielle maximale dans la section considérée

M_t
: sollicitation moment de torsion

e_m
: épaisseur minimale de la paroi dans la section considérée

A_m
: aire équivalente correspondant à la surface intérieure de la section du tube à mi-épaisseur de la paroi (voir schéma)

La surface A_m cosrrepond à la surface hachurée en rose sur le schéma ci-dessous.



aire équivalente pour le calcul de torsion

exercices de calcul de torsion

présentation

On présente ici des exercices qui permettent de se familiariser avec les méthodes de calcul des poutres en torsion.

exercice numéro 1: calcul approché de torsion

présentation

Le but de cet exercice est de dimensionner un arbre en torsion. On suppose un arbre de section circulaire pleine soumis à un couple C = 500 daN m avec un matériau S235 et un coefficient de sécurité de 2

question n° 1

Calculer le diamètre nécessaire de l'arbre.

question n° 2

Calculer la contrainte de torsion dans l'arbre si la section était un I de 50 x 5

question n° 3

Calculer la contrainte de torsion dans l'arbre si la section était un tube carré de 50 x 5

solution n° 1

$$J = \pi \frac{D^4}{32}$$

$$\tau = \frac{C}{w_T} \qquad w_T = \frac{J}{\frac{D}{2}}$$

On doit comparer la contrainte de Von Mises à la contrainte admissible soit

$$\sigma_{\text{admissible}} = \frac{R_{\text{p0,2}}}{2}$$

$$\tau\sqrt{3} = \frac{R_{\text{p0,2}}}{2}$$

solution n° 2

Dans le cas d'un I

$$J = \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{3} b_i e_i^3$$

solution n° 3

Dans le cas d'un tube à paroi mince on peut calculer la contrainte de torsion par la relation suivante:

$$\tau = \frac{C}{2A_m e}$$

τ
: contrainte de torsion

A_m
: surface moyenne équivalente

e
: épaisseur de la paroi du tube

résultat n° 1

Diamètre nécessaire = 72 mm

résultat n° 2

La contrainte de torsion est τ = 4000 MPa

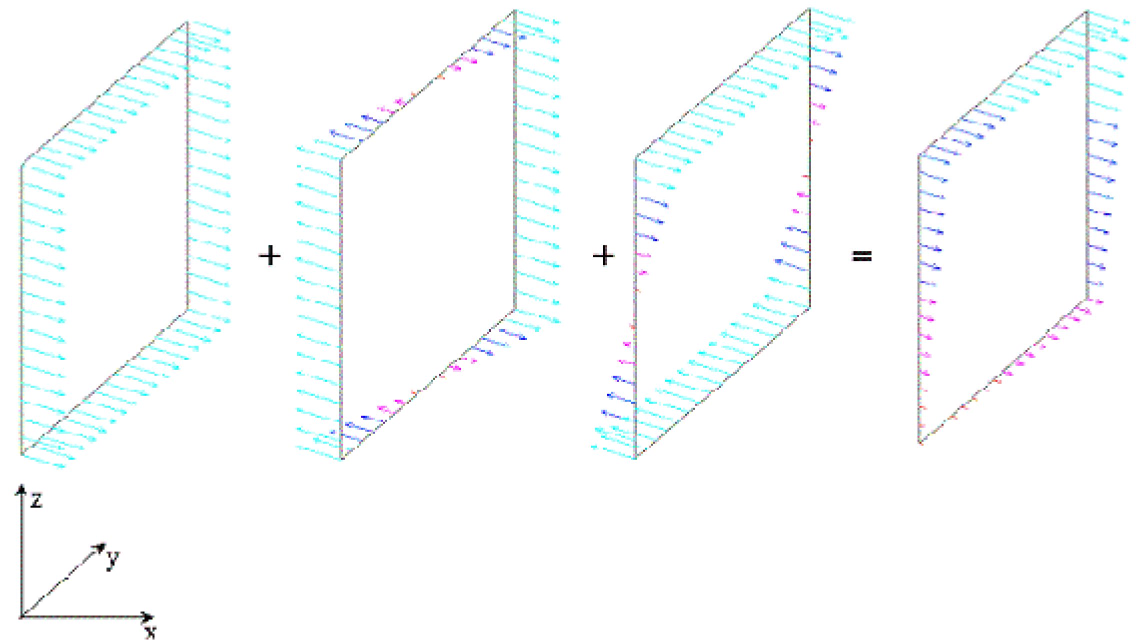
résultat n° 3

La contrainte est de 250 MPa environ.

sollicitations composées

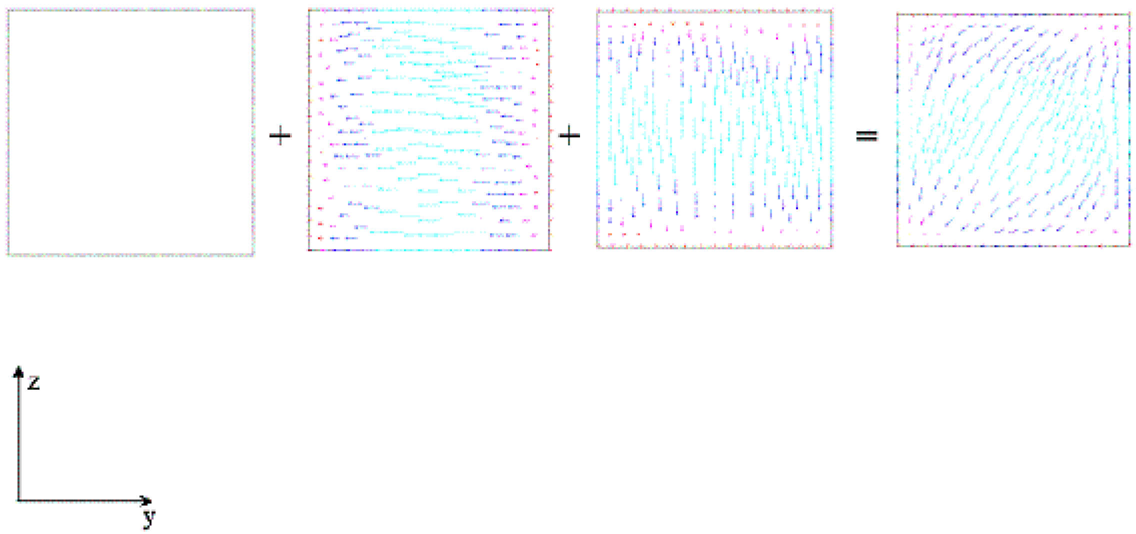
introduction

Lorsqu'il y a plusieurs sollicitations simples on doit envisager des sollicitations composées. La contrainte normale due à une sollicitation normale et à une flexion d'axe y et une flexion d'axe z sur une section carrée doit être calculée en faisant le cumul en chaque point de la section.



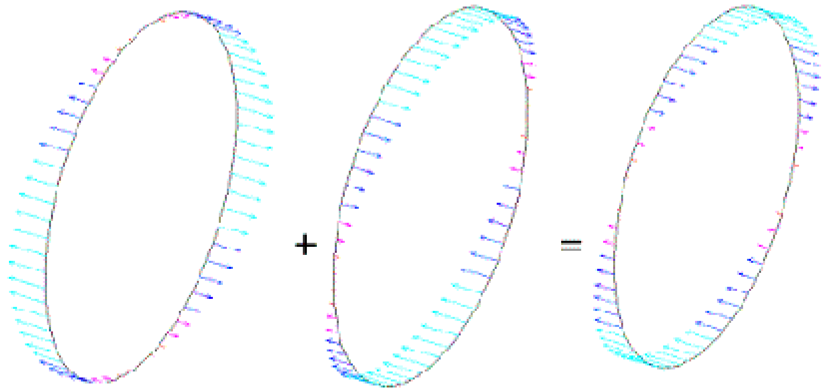
1 contrainte normale flexion et traction

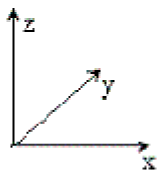
Contrainte tangentielle due à une sollicitation normale plus une flexion d'axe y et une flexion d'axe z sur une section carrée



2 contrainte tangentielle

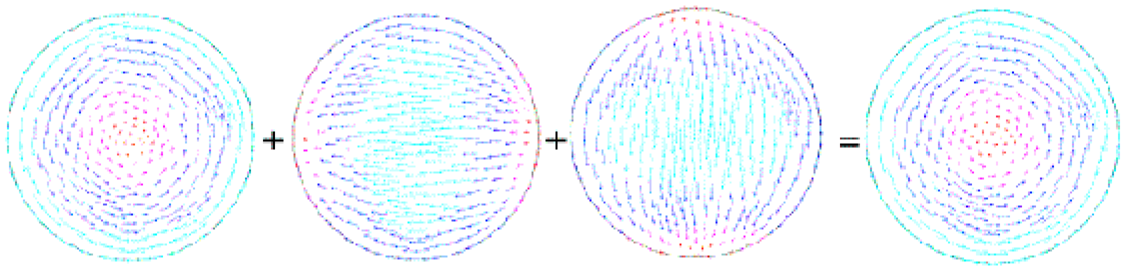
Contrainte normale due à une torsion plus une flexion d'axe y et une flexion d'axe z sur une section circulaire

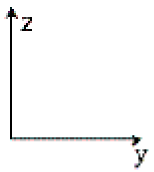




3 contrainte normale et tangentielle

Contrainte tangentielle due à une torsion plus une flexion d'axe y et une flexion d'axe z sur une section circulaire



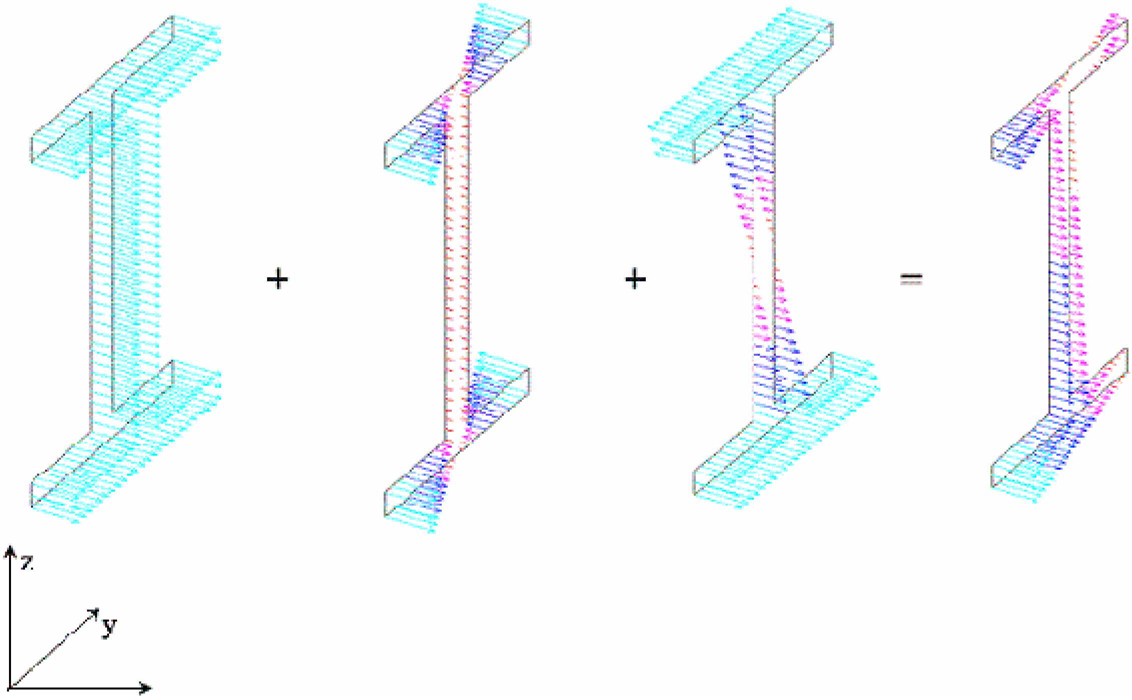


Contraintes tangentielles torsion : $\tau = \dfrac{M_t}{\dfrac{I_0}{v}}$

(cisaillement dû à effort tranchant négligé)

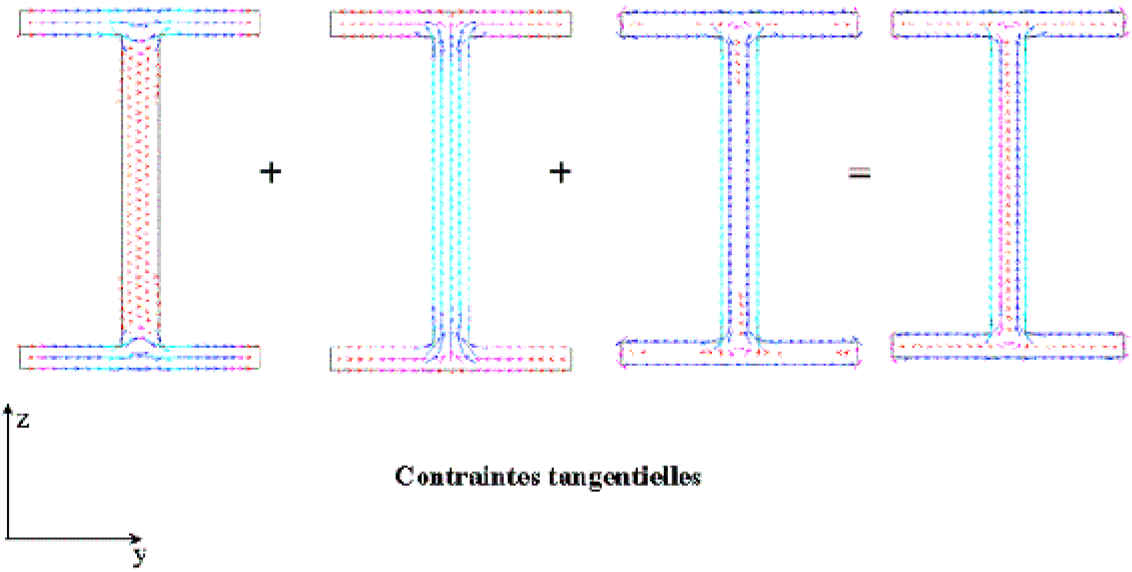
4

Contrainte normale due à une sollicitation normale plus une flexion d'axe y et une flexion d'axe z sur une section en I



10

Contrainte tangentielle due à une sollicitation normale plus une flexion d'axe y et une flexion d'axe z sur une section en I



11

exercices de calcul de sollicitations composées

présentation

On présente ici des exercices qui permettent de se familiariser avec les méthodes de calcul des poutres sous sollicitations composées.

exercice numéro 1: calcul d'un support (simplifié)

présentation

Le but de cet exercice est de calculer un support en 3d en négligeant l'effet de l'effort tranchant. On souhaite dimensionner un support de tuyauterie. On connaît les forces qui s'apliquent à l'extrémité du support et qui ont été calculées à partir du dimensionnement de la tuyauterie. Le profilé sera soudé sur une platine, la platine sera fixée dans le béton par des chevilles à expansion. Le matériau sera un acier de construction S235 suivant NF EN 10025. La figure ci-dessous représente la structure.

structure à étudier

La contrainte limite d'élasticité est:

$$R_{p02} = 235 \text{ MPa}$$

Le coefficient de sécurité est ici:

$$\alpha = 1{,}5$$

Les forces à l'extrémité du support telles que sur le schéma sont:

$$F_x = 50 \text{ daN}$$

$$F_y = 80 \text{ daN}$$

$$F_z = 80 \text{ daN}$$

La longueur du support est:

$$L = 58 \text{ cm}$$

question n° 1

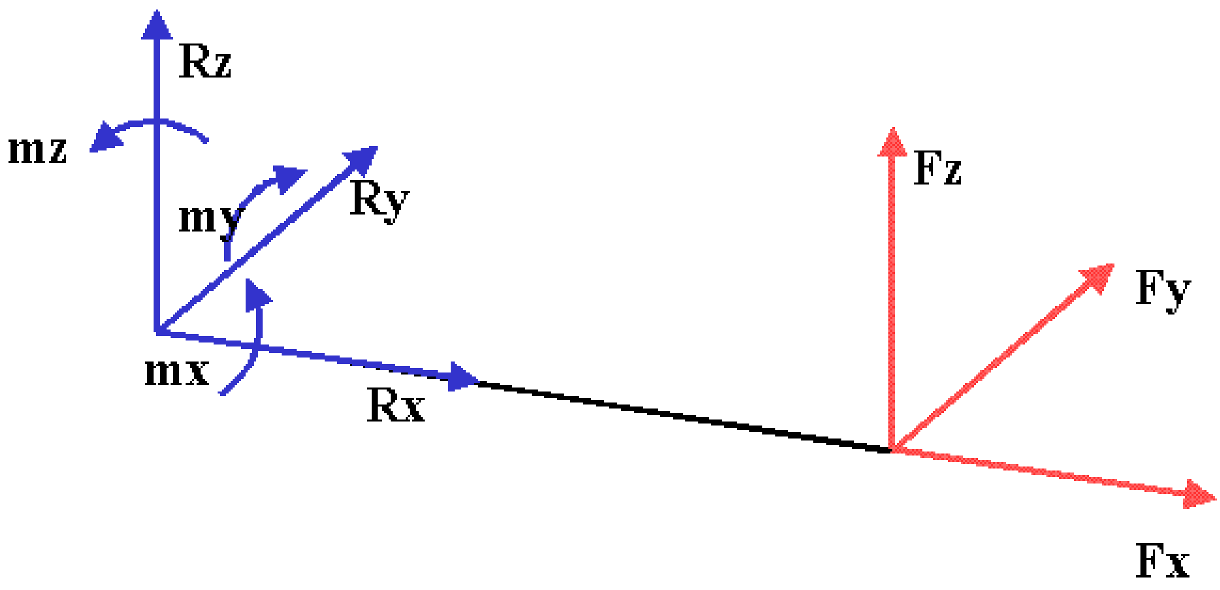
déterminer le profilé du support ci-dessus en choisissant un tube carré et en négligeant l'effet de l'effort tranchant.

solution n° 1

On propose d'utiliser la procédure de dimensionnement suivante:

- modélisation
- calcul des actions de liaison (réactions)
- calcul des sollicitations
- calcul des contraintes (on ne calcule que les contraintes de flexion et on néglige les contraintes dues à l'effort tranchant)
- vérification du critère de contrainte

On considère que la liaison du profilé dans la platine par l'intermédiaire de sourdures est un encastrement. On fait donc apparaître 6 réactions.



schéma

Pour le calcul des actions de liaison (réactions) on utilise l'équilibre du profilé complet en appliquant le principe fondamental de la statique permet d'écrire les équations suivantes

$$F_x + R_x = 0$$

$$F_y + R_y = 0$$

$$F_z + R_z = 0$$

$$m_x = 0$$

$$m_y - F_z L = 0$$

$$m_z + F_y L = 0$$

Le système est isostatique car on a 6 équations d'équilibre et 6 inconnues, on obtient donc les valeurs des réactions:

$$R_x = -500 \text{ N}$$

$$R_y = -800 \text{ N}$$

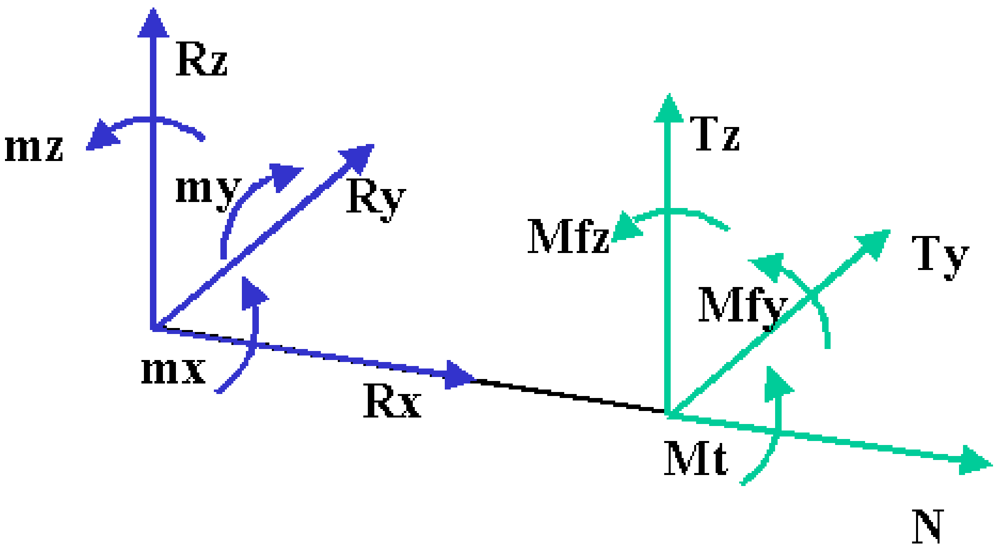
$$R_z = -800 \text{ N}$$

$$m_x = 0 \text{ Nm}$$

$$m_y = 464 \text{ Nm}$$

$$m_z = -464 \text{ Nm}$$

calcul des sollicitations. L'équilibre d'une partie du profilé de longueur x, en appliquant le principe fondamental de la statique permet d'écrire les équations suivantes



schéma

$$N + R_x = 0$$

$$T_y + R_y = 0$$

$$T_z + R_z = 0$$

$$m_x + M_T = 0$$

$$m_y + M_{fy} + R_z x = 0$$

$$m_z + M_{fz} - R_y x = 0$$

On en déduit les valeurs des sollicitations maximales au point x = 0 (à l'encastrement):

$$N = 500 \text{ N}$$

$$T_y = 800 \text{ N}$$

$$T_z = 800 \text{ N}$$

$$M_T = 0 \text{ Nm}$$

$$M_{fy} = -464 \text{ Nm}$$

$$M_{fz} = 464 \text{ Nm}$$

calcul des contraintes (on ne calcule que les contraintes de flexion et on néglige les contraintes dues à l'effort tranchant). On choisit a priori une section de tube carrée de dimension 50 x 5 mm (largeur 50, épaisseur 5). L'aire de la section et les moments quadratiques sont

$$A = 8{,}88\ \mathrm{cm}^2$$

$$I_y = 29{,}64\ \mathrm{cm}^4$$

$$I_z = 29{,}64\ \mathrm{cm}^4$$

Les modules de flexion suivant les axes y et z sont:

$$w_y = \frac{I_y}{v}$$

$$w_z = \frac{I_z}{v}$$

On a ici

$$v = \frac{50}{2} = 25\ \mathrm{mm}$$

donc:

$$w_y = 11{,}856\ \mathrm{cm}^3$$

$$w_z = 11{,}856\ \mathrm{cm}^3$$

On néglige ici les contraintes de tangentielles qui seraient dues aux efforts tranchants T_y et T_z et on calcule les contraintes normales dues à l'effort normal N et aux moments de flexion suivant y et z.
Contrainte due à l'effort normal

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = 0{,}56\ \mathrm{MPa}$$

Contrainte due à au moment de flexion suivant l'axe y

$$\sigma_{\mathrm{fy}} = \frac{M_{\mathrm{fy}}}{w_y} = 39{,}1\ \mathrm{MPa}$$

Contrainte due à au moment de flexion suivant l'axe z

$$\sigma_{\mathrm{fz}} = \frac{M_{\mathrm{fz}}}{w_z} = 39{,}1\ \mathrm{MPa}$$

On vérifie que la contrainte normale maximale est inférieure à la contrainte limite d'élasticité divisée par le coefficient de sécurité. On considère ici compte tenu de la forme de la section que la contrainte normale maximale est égale à la somme en valeur absolue des contraintes normales de traction, de flexion suivant y et de flexion suivant z, on a donc:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{\mathrm{fy}} + \sigma_{\mathrm{fz}} = 78{,}8\ \mathrm{MPa}$$

On doit ici vérifier le critère suivant :

$$\sigma \leq \frac{R_{\mathrm{p}0,2}}{\alpha} = \frac{235}{1{,}5} = 156{,}7\ \mathrm{MPa}$$

Le critère est donc satisfait.

résultat n° 1

Un tube de section 50 x 5 mm pourrait convenir

exercice numéro 2: calcul du profilé d'un support (complet)

présentation

Le but de cet exercice est de calculer un support en 3d en négligeant l'effet de l'effort tranchant. On souhaite dimensionner un support de tuyauterie. On connaît les forces qui s'apliquent à l'extrémité du support et qui ont été calculées à partir du dimensionnement de la tuyauterie. Le profilé sera soudé sur une platine, la platine sera fixée dans le béton par des chevilles à expansion. Le matériau sera un acier de construction S235 suivant NF EN 10025. La figure ci-dessous représente la structure.

structure à étudier

La contrainte limite d'élasticité est:

$$R_{p02} = 235 \text{ MPa}$$

Le coefficient de sécurité est ici:

$$\alpha = 1{,}5$$

Les forces à l'extrémité du support telles que sur le schéma sont:

$$F_x = 50 \text{ daN}$$

$$F_y = 80 \text{ daN}$$

$$F_z = 80 \text{ daN}$$

La longueur du support est:

$$L = 58 \text{ cm}$$

question n° 1

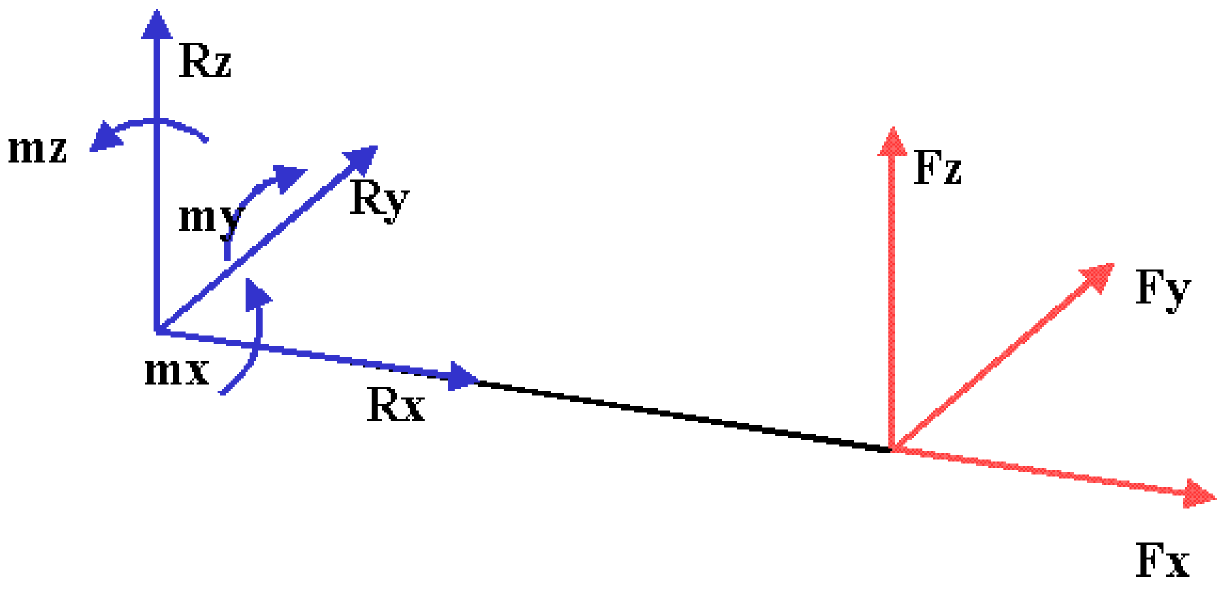
déterminer le profilé du support ci-dessus en choisissant un tube carré et en tenant compte de l'effet de l'effort tranchant.

solution n° 1

déterminer le profilé du support ci-dessus. On propose d'utiliser la procédure de dimensionnement suivante:

- modélisation
- calcul des actions de liaison (réactions)
- calcul des sollicitations
- calcul des contraintes (on ne calcule que les contraintes de flexion et on néglige les contraintes dues à l'effort tranchant)
- vérification du critère de contrainte

On considère que la liaison du profilé dans la platine par l'intermédiaire de sourdures est un encastrement. On fait donc apparaître 6 réactions.



schéma

calcul des actions de liaison (réactions) grâce à l'équilibre du profilé complet en appliquant le principe fondamental de la statique permet d'écrire les équations suivantes

$$F_x + R_x = 0$$

$$F_y + R_y = 0$$

$$F_z + R_z = 0$$

$$m_x = 0$$

$$m_y - F_z L = 0$$

$$m_z + F_y L = 0$$

Le système est isostatique car on a 6 équations d'équilibre et 6 inconnues, on obtient donc les valeurs des réactions:

$$R_x = -500 \text{ N}$$

$$R_y = -800 \text{ N}$$

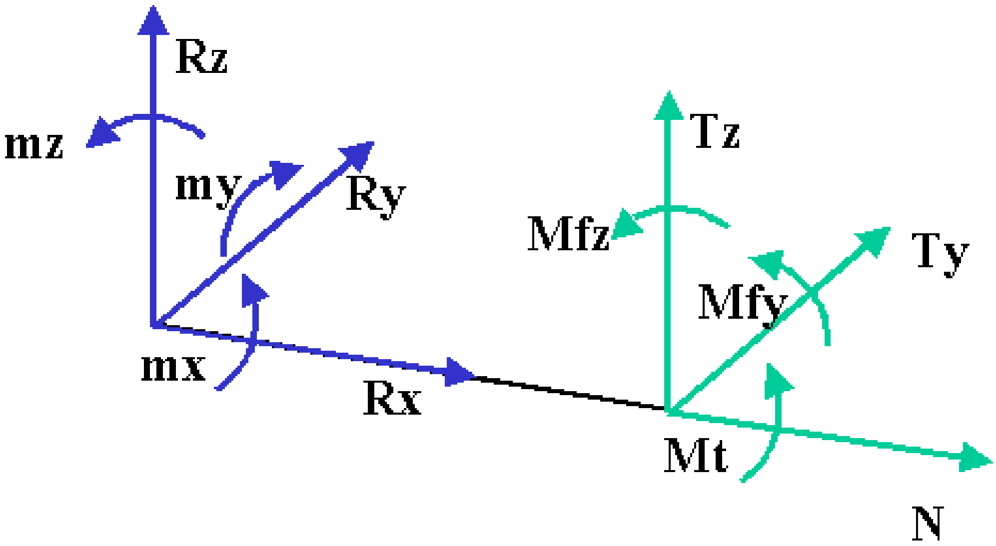
$$R_z = -800 \text{ N}$$

$$m_x = 0 \text{ Nm}$$

$$m_y = 464 \text{ Nm}$$

$$m_z = -464 \text{ Nm}$$

calcul des sollicitations. L'équilibre d'une partie du profilé de longueur x, en appliquant le principe fondamental de la statique permet d'écrire les équations suivantes



schéma

$$N + R_x = 0$$

$$T_y + R_y = 0$$

$$T_z + R_z = 0$$

$$m_x + M_T = 0$$

$$m_y + M_{fy} + R_z x = 0$$

$$m_z + M_{fz} - R_y x = 0$$

On en déduit les valeurs des sollicitations maximales au point x = 0 (à l'encastrement):

$$N = 500 \text{ N}$$

$$T_y = 800 \text{ N}$$

$$T_z = 800 \text{ N}$$

$$M_T = 0 \text{ Nm}$$

$$M_{fy} = -464 \text{ Nm}$$

$$M_{fz} = 464 \text{ Nm}$$

calcul des contraintes. On choisit a priori une section de tube carrée de dimension 50 x 5 mm (largeur 50, épaisseur 5). L'aire de la section et les moments quadratiques sont

$$A = 8{,}88\ \text{cm}^2$$

$$I_y = 29{,}64\ \text{cm}^4$$

$$I_z = 29{,}64\ \text{cm}^4$$

Les modules de flexion suivant les axes y et z sont:

$$w_y = \frac{I_y}{v}$$

$$w_z = \frac{I_z}{v}$$

On a ici

$$v = \frac{50}{2} = 25\ \text{mm}$$

donc:

$$w_y = 11{,}856\ \text{cm}^3$$

$$w_z = 11{,}856\ \text{cm}^3$$

L'aire réduite nécessaire pour calculer les contraintes tangentielles est ici

$$A_r = \frac{A}{2}$$

soit

$$A_r = \frac{8{,}88}{2} = 4{,}44\ \text{cm}^2$$

On calcule les contraintes normales dues à l'effort normal N et aux moments de flexion suivant y et z.. Contrainte due à l'effort normal

$$\sigma_N = \frac{N}{A} = 0{,}56\ \text{MPa}$$

Contrainte due à au moment de flexion suivant l'axe y

$$\sigma_{\text{fy}} = \frac{M_{\text{fy}}}{w_y} = 39{,}1\ \text{MPa}$$

Contrainte due à au moment de flexion suivant l'axe z

$$\sigma_{\text{fz}} = \frac{M_{\text{fz}}}{w_z} = 39{,}1\ \text{MPa}$$

Les contraintes tangentielles dues aux efforts tranchants T_y et T_z sont:

$$\tau_y = \frac{T_y}{A_r} = 1{,}8\ \text{MPa}$$

$$\tau_z = \frac{T_z}{A_r} = 1{,}8\ \text{MPa}$$

vérification du critère de contrainte. On vérifie que la contrainte équivalente de Von Mises maximale est inférieure à la contrainte limite d'élasticité divisée par le coefficient de sécurité. On considère ici compte tenu de la forme de la section que la contrainte normale maximale est égale à la somme en valeur absolue des contraintes normales de traction, de flexion suivant y et de flexion suivant z, on a donc:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{\text{fy}} + \sigma_{\text{fz}} = 78{,}8\ \text{MPa}$$

On combine les contraintes tangentielles en faisant la somme quadratique en considérant que les valeurs maximales sont au même point de la section mais dans des directions différentes, on a:

$$\tau = \sqrt{{\tau_y}^2 + {\tau_z}^2} = 2{,}5\ \text{MPa}$$

La contrainte équivalente de Von Mises est:

$$\sigma_{\text{eqVM}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} = 79{,}0\ \text{MPa}$$

On doit ici vérifier le critère suivant :

$$\sigma_{\text{eqVM}} \leq \frac{R_{\text{p0,2}}}{\alpha} = \frac{235}{1{,}5} = 156{,}7\ \text{MPa}$$

Le critère est donc satisfait.

résultat n° 1

Un tube de section 50 x 5 mm pourrait convenir

élasticité

introduction

On présente ici des notions d'élasticité.

contrainte

introduction

On présente ici les notions relatives à la définition des contraintes .

contraintes équivalentes

introduction

Contrainte équivalente de Von Mises en fonction des contraintes principales

$$\sigma_{\text{eqVM}} = \sqrt{\frac{1}{2}\left[\,(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2\right]}$$

Dans le cas des poutres cette formule générale devient

$$\sigma_{\text{eqVM}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2}$$

La contrainte équivalente de Tresca se calcule de la façon suivante en fonction des contraintes principales

$$\sigma_{\text{eqTresca}} = \text{Max}\left(\,|\sigma_1 - \sigma_2|,\ |\sigma_1 - \sigma_3|,\ |\sigma_2 - \sigma_3|\,\right)$$

Dans le cas des poutres cette formule générale devient

$$\sigma_{\text{eqTresca}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$$

Les deux contraintes équivalentes sont numériquement proches. La contrainte équivalente de Tresca est supérieure ou égale à la contrainte de Von Mises (15% maximum). On utilise le plus souvent la contrainte équivalente de Von Mises pour les matériaux ductiles tels que l'acier d'usage général

résumé

introduction

On présente ici un résumé de la démarche de calcul et de dimensionnement par la résistance des matériaux ainsi que les principales formules utiles pour le calcul.

démarche

Les principales étapes de la procédure de dimensionnement sont les suivantes

- modélisation mécanique
- calcul des efforts de liaisons (réactions)
- calcul des sollicitations
- calcul des contraintes ou des déplacements
- application de critères de dimensionnement

modélisation mécanique

La première étape de modélisation mécanique peut se décomposer de la façon suivante:

- détermination de la géométrie
- caractérisation du matériau
- détermination des liaisons avec l'extérieur (réactions, conditions limites)
- détermination des efforts et des chargements
- détermination du type de modèle (poutres, plaques, coques, volumes)

Cette étape est primordiale pour la suite du calcul car c'est ici que l'on fixera les principales hypothèses de calcul. On cherchera à construire un modèle le plus simple possible tout en respectant le fonctionnement mécanique de la structure étudiée. En général en résistance des matériaux on utilise des modèles du type poutre.

efforts de liaison

La seconde étape consiste à calculer les efforts de liaison ou réactions qui apparaissent suite à la modélisation. En effet pour déterminer la géométrie de la pièce à caculer on a été amené à isoler la structure ou une partie de la structure de l'extérieur. On fait apparaitre ainsi des efforts (forces et moments) à la liaison entre la partie de la structure que l'on calcule et ce que l'on a éliminé du modèle (éxtérieur). L'écriture des équations d'équilibre permettent de calculer les réactions pour des structures isostatiques.

sollicitations

La troisième étape consiste à calculer les efforts internes à la structure que l'on nomme les sollicitations. Pour les faire apparaître il faut imaginer que l'on fait une coupe dans le modèle et que l'on élimine la partie de droite par exemple. On fait alors apparaître des sollicitations (forces et moments) qui remplacent la partie de la structure éliminée. On peut calculer ces sollicitations en écrivant l'équilibre de la partie de la structure conservée après la coupe pour les structures isostatiques. Les sollicitations pour les poutres sont en 2d:

N

effort normal

T
: effort tranchant

M_f
: moment de flexion

En 3d on a 6 sollicitations:

N
: effort normal

T_y
: effort tranchant suivant l'axe y de la section

T_z
: effort tranchant suivant l'axe z de la section

M_t
: moment de torsion

M_{fy}
: moment de flexion suivant l'axe y de la section

M_{fz}
: moment de flexion suivant l'axe z de la section

contraintes et déplacements

La quatrième étape consiste à calculer les contraintes ou les déplacements à partir des sollicitations calculées précédemment. Pour cela on dispose de relations permettant de calculer les contraintes en fonction des sollicitations simples (traction, cisaillement, torsion,etc) et de règles permettant de combiner les contraintes pour les cas de sollicitations composées. On distingue les contraintes normales (σ) et les contraintes tangentielles (τ). Les déplacements peuvent également être calculés à partir des sollicitations. En résistance des matériaux on se contente en général de caculer les déplacements dus à la flexion (flèche).

critères de dimensionnement

La cinquième étape est comme la première cruciale puisque l'on va choisir puis appliquer les critères de dimensionnent qui vont nous permettre de conclure sur l'acceptabilité de la structure calculée vis à vis de modes de ruine. On applique assez systématiquement des critères de contraintes vis-à-vis de la contrainte limite d'élasticité du matériau utilisé et des critères de flèches maximales à ne pas dépasser mais il faudra vérifier que d'autres modes de ruine ne sont pas à envisager également (flambement, fatigue, rupture brutale, fluage, corrosion, ...)

traction-compression

La contrainte normale pour un cas de traction-compression simple est donnée par la relation suivante:

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

σ
: contrainte normale de traction ou de compression

N
: sollicitation d'effort normal

A
: aire de la section de poutre étudiée

cisaillement pur

La contrainte tangentielle pour un cas de cisaillement pur est donnée par la relation suivante:

$$\tau = \frac{T}{A}$$

τ
: contrainte tangentielle de cisaillement

T
: sollicitation d'effort tranchant

A
: aire de la section de poutre étudiée

flexion pure

La contrainte normale pour un cas de flexion pure est donnée par la relation suivante:

$$\sigma = \frac{M_f}{w}$$

τ
: contrainte normale de flexion maximale dans la section considérée

M_f
: sollicitation moment de flexion

w
: module de flexion de la section considérée

torsion simple

La contrainte tangentielle pour un cas de torsion simple est donnée par la relation suivante:

$$\tau = \frac{M_t}{w_t}$$

τ
: contrainte tangentielle maximale dans la section considérée

M_t
: sollicitation moment de torsion

w_t
: module de torsion de la section considérée

Cette formule n'est applicable que pour la torsion sur une poutre de section circulaire.

torsion sur des sections ouvertes

L'application de moment de torsion des sections ouvertes (I,U,etc) est tout à fait déconseillée car ces sections résistent très mal à la torsion et cela peut conduire à des situations dangereuses faisant intervenir des instabilités. On donne ici des relations approchées qui permettent d'estimer les contraintes de torsion dans ces types de sections. La contrainte tangentielle pour un cas de torsion peut être estimée par la relation suivante:

$$\tau = \frac{M_t}{w_t}$$

τ
: contrainte tangentielle maximale dans la section considérée

M_t
: sollicitation moment de torsion

w_t
: module de torsion de la section considérée

Le module de torsion peut alors être estimé par la relation suivante:

$$w_t = \frac{J}{e_{\max}}$$

w_t
: module de torsion

J
: 'inertie' de torsion

$e_{\max}$
: épaisseur maximale des parois la section considérée

Pour estimer 'l'inertie' de torsion on peut utiliser la relation suivante qui suppose que l'on a découpé la section en rectangles de longueur b_i et de largeur e_i. On suppose ici que la largeur est petite par rapport à la longueur. :

$$J = \sum_{i=1}^{i=n} \frac{1}{3} b_i e_i^3$$

J
: 'inertie' de torsion

b_i
: longueur du rectangle considérée

e_i
: largeur du rectangle considérée

n
: nombre de rectangle composant la section

torsion sur des tubes

On donne ici des relations approchées qui permettent d'estimer les contraintes de torsion dans des sections tubulaires dont la paroi est mince par rapport aux dimensions de la section. La contrainte tangentielle de torsion dans ce cas peut être estimée par la relation suivante:

$$\tau = \frac{M_t}{2A_m e_m}$$

τ
: contrainte tangentielle maximale dans la section considérée

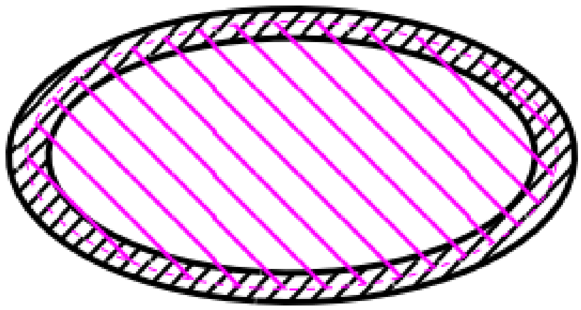
M_t
: sollicitation moment de torsion

e_m
: épaisseur minimale de la paroi dans la section considérée

A_m

aire équivalente correspondant à la surface intérieure de la section du tube à mi-épaisseur de la paroi (voir schéma)

La surface A_m cosrrepond à la surface hachurée en rose sur le schéma ci-dessous.



aire équivalente pour le calcul de torsion